$\mathscr{L}ogic\ Proof$

Некоторые вопросы теории сложности вычислений с точки зрения элементарной теории моделей

*В представленном исследовании рассматривается одна из известных проблем теории сложности вычислений: каково соотношение классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co}-\mathcal{NP}$? Для ответа на этот вопрос было переосмысленно и соответствующим образом переформулировано известное фундаментальное понятие - модельная полнота исследуемой теории, раздела математики "***Теория моделей***". Целью переформулировки этого фундаментального понятия являлось, описать соотношение классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co}-\mathcal{NP}$, с теоретико - модельной точки зрения. Известный факт: иерархия свойств в любой модели модельно полной теории обрываетя на первом уровне. Эта ключевая идея была положена в основу для плодотворного исследования соотношения классов сложности $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co}-\mathcal{NP}$. Известный факт: существует такой оракул $\mathbf{A}$ при котором класс сложности $\mathcal{NP}(\mathbf{A})$ отличается от класса сложности $\mathbf{co}-\mathcal{NP}(\mathbf{A})$. Разработав соответствующим образом оракульные вычисления и формализовав их, в классе примитивно рекурсивных алгоритмов, а затем, используя теоретико - модельное соотношение между указанными классами, удалось связать соотношение классов сложности вычислений $\mathcal{NP}$ и $\mathbf{co}-\mathcal{NP}$ с соотношением классов сложности $\mathcal{NP}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{co}-\mathcal{NP}(\mathbf{A})$, что затем позволило установить, что класс сложности $\mathcal{NP}$ не является булевой алгеброй. При форализации оракульных вычислений в классе примитивно рекурсивных алгоритмов были доказаны ряд интересных теорем, одна из которых есть аналог теоремы о неподвижной точке, которая использовалась в ключевой теореме позволившей установить, что класс сложности $\mathcal{NP}$ не является булевой алгеброй. Прочтя представленное исследование, можно понять почему эффект релятивизации препятствует получению высоких нижних оценок или отделению одного класса сложности от другого класса сложности вычислений методами "Дискретной математики"[1]. В слабых моделях средства доказательства не позволяют доказать, например, утверждение $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, а в сильных моделях средства доказательства подвержены релятивизации. Если имеется доказательство утверждение $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, то для любого оракула $\mathbf{A}$ мы получим доказательство утверждение $\mathcal{P}(\mathbf{A}) \neq \mathcal{NP}(\mathbf{A})$, однако имеется такой оракул $\mathbf{B}$, что верно $\mathcal{P}(\mathbf{B}) = \mathcal{NP}(\mathbf{B})$. Если же имеется доказательство утверждение $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, то для любого оракула $\mathbf{A}$ мы получим доказательство утверждение $\mathcal{P}(\mathbf{A}) = \mathcal{NP}(\mathbf{A})$, однако имеется такой оракул $\mathbf{C}$, что верно $\mathcal{P}(\mathbf{C}) \neq \mathcal{NP}(\mathbf{C})$. Описанные трудности успешно преодолены в представленном исследовании.*

Представленное исследование является оригинальным, а многие важные понятие, которые используются в этом исследовании, во всех известных мне исследованиях, не встречались.

Введение

Одной из самых интересных проблем сложности вычислений, является проблема, состоящая в том, что существует или не существует полиномиальный алгоритм, выполняя который на произвольной формуле исчисления высказываний, можно получить ответ выполнима или не выполнима рассматриваемая формула исчисления высказываний. Эта проблема, которую как правило обозначают **SAT**, интересна тем, что она просто формулируется и формирует чувство на скорый ответ на эту проблему. А положительный решение этой проблемы дает возможность построения весьма эффективных алгоритмов для многих практических задач. Этой проблеме посвящены десятки тысяч научных и весьма интересных исследований, позволившие более глубоко выяснить сущность фундаментального понятия алгоритма, но на поставленный вопрос до сих пор нет ответа. Однако, ответ в определенном смысле был получен в [13], в котором

[1] Под методами Дискретной математики, я понимаю те доказательства, котоорые можно выразить в стандартной модели арифметики, например, доказательство Consis нельзя выразить в стандартной модели арифметики, хотя это предложение истино в этой модели, Не все утверждения, которые подвергаются релятивизации, можно доказать методами Дискретной математики. И это продемонстрировано в данном исследовании.

была на определенном уровне, понята сущность проблемы **SAT**. В упомянутом исследовании, которое было оригинальным и неожиданным для меня, был построен оракул $\mathbf{A}$, такой, что класс полиномиальных оракульных алгоритмов, использующих в качестве оракула $\mathbf{A}$, не сможет распозать такой язык как $L(\mathbf{A}) = \{\alpha : \exists x(|\alpha| = |x| \wedge x \in \mathbf{A})\}$, но сможет очевидно, распознать недетерминированный полиномиальный оракульный алгоритм с тем же оракулом. Этот выдающийся результат сформировал у меня подход, реализуя который, можно было бы получить ответ на вышепоставленный вопрос. Что для этого было необходимо получить?

Первое. Формализовать(синтаксически описать) вычисления примитивно рекурсивных словарных функций и оракульных примитивно рекурсивных словарных функций.

См. Part I и Part II.

Второе. Синтаксически описать класс полиномиально вычислимых словарных функций и полиномиально вычислимых словарных функций, при вычислении которых, может использоваться оракул, т.е. полиномиальный оракульный алгоритм.

См. Part III.

Третье. Связать формализованное вычисление примитивно рекурсивных словарных функций с формализованным вычислением оракульных примитивно рекурсивных функций.

См. Part IV и Part V.

Четвертое. Выразить синтактические свойства исследуемых языков, например **SAT**, используя для этого понятия и методы, которые развиты в "Теории моделей".

См. Part VI.

Реализовав все четыре случая, удалось ответить на вопрос $\mathcal{NP}$=?$\mathbf{co}-\mathcal{NP}$.

Part I

Исчисление равенств для вычисления замкнутых термов

Пусть алфавиты $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_6$ таковы, что: $\mathscr{L}_1 = \{S, I, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \}$, $\mathscr{L}_2 = \{\Lambda, x\}$, $\mathscr{L}_3 = \{R, J\}$, $\mathscr{L}_4 = \{=, |, ,\}$, $\mathscr{L}_5 = \{[,], (,)\}$, $\mathscr{L}_6 = \{\mathbf{U}\}$, $\mathscr{L} = \bigcup\limits_{i=1}^{i=5} \mathscr{L}_i$, $\mathscr{L}(\mathbf{U}) = \mathscr{L} \cup \mathscr{L}_6$. В алфавите $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ будет формализовано вычисление замкнутых термов для класса оракульных примитивно рекурсивных словарных функций[1-4][5 с. 204].

Для полноты приведём несколько достаточно традиционных определений.

Определение функтора и его местности:

1) Слова вида: $\mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, S|S, S||S, \ldots, S\underbrace{|, \ldots, |}_{m-\text{ раз}}S$ - одноместные функторы. Одноместный функтор $S\underbrace{|, \ldots, |}_{k-\text{ раз}}S$ будем обозначать как $\mathbf{S}_k$.

2) Слова вида: $I\underbrace{|, \ldots, |}_{m-\text{ раз}}\boldsymbol{,}\underbrace{|, \ldots, |}_{n-\text{ раз}}$ - n - местный функтор, который будем обозначать традиционно $\mathbf{I}^n_m$, при $1 \le m \le n$.

3) Слово $\mathbf{U}$ - одноместный функтор. В дальнейшем функтор $\mathbf{U}$ будем называть также неопределяемым функциональным символом или оракульным символом.

4) Слова вида: $\dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ - двухместные функторы.

5) Если Φ - k - местный функтор, $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ - n - местные функторы, то слово $[J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ - n - функтор. Этот функтор будем называть функтором суперпозиции.

Введём следующее важное понятие:

а) Λ - аргументное слово, которое называется пустым словом;

б) если α - аргументное, то слово $\mathbf{S}_k(\alpha)$ - аргументное слово, которое будем обозначать как αa_k.

Аргументное слово α называется k - алфавитным, если это слово не содержит функторов $\mathbf{S}_l$, при $l > k$.

Множество B аргументных слов называется k - алфавитным, если каждое слово $\alpha \in B$ является k - алфавитным. Пусть $k > 1$. Число всех k - алфавитных слов, длина которых $l > 0$, равно k^l. Число всех k - алфавитных слов, длина которых не больше l, равно $\dfrac{k^{l+1} - 1}{k - 1}$.

Аргументные слова, не содержащие функтор $\mathbf{S}_k$, при $k > 1$, называются натуральными числами.

6) Если α - аргументное слово, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ - 2 -х местные функторы, тогда слово $[R\alpha\Phi_1, \cdots, \Phi_m]$ - 1 - местный функтор.

7) Если Φ - $k \ge 1$ - местный функтор, $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ - k+2 - местные функторы, тогда слово $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m]$ - k+1 - местный функтор. Функторы пунктов 6 и 7 будем называть рекурсивными функторами, а функторы $\Phi, \Phi_1, \ldots \Psi_m$ называются составляющими функторами, число m называется степенью разветвлённости рассматриваемого рекурсивного функтора.

Функторы пунктов 1-4 будут называться исходными функторами.

Слова вида $x\underbrace{|, \ldots, |}_{l-\text{ раз}}x$ - переменные. Обозначим эти слова традиционно в виде x_l.

Понятие терма.

1) Всякое аргументное слово и всякая переменная - терм.

2) Если $t_1, \ldots, t_k$ - термы, Ψ - k - местный функтор, тогда слово $\Psi(t_1, \ldots, t_k)$ - терм.

Для любого подмножества $\mathbb{A}$ аргументных слов, введём следующие равенства(определяющие равенства), в качестве аксиом определяемой формализации для вычисления оракульных замкнутых термов:

1) $\mathbf{T} = \mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ - произвольный терм,

2) $\mathbf{Z}(x_1) = \Lambda$,

3) $\mathbf{I}_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$,

4) $\boldsymbol{\delta}(\Lambda) = \Lambda$,

5) $\boldsymbol{\delta}(x_1 a_k) = x_1$,

6) $\mathbf{Length}(\Lambda) = \Lambda$,

7) $\mathbf{Length}(x_1 a_k) = \mathbf{Length}(x_1) a_1$,

8) $x_1 \dot{-} \Lambda = x_1$,

9) $x_1 \dot{-} x_2 a_k = \boldsymbol{\delta}(x_1 \dot{-} x_2)$,

10) $\mathbf{Concat}(x_1, \Lambda) = x_1$,

11) $\mathbf{Concat}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2) a_k$,

12) $\mathbf{D}(x_1, \Lambda) = \Lambda$,

13) $\mathbf{D}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{D}(x_1, x_2))$,

14) $[J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{x}) = \Phi(\Psi_1(\overline{x}), \ldots, \Psi_k(\overline{x}))$,

15) $[R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m](\Lambda) = \alpha$,

16)$[R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m](x a_k) = \Phi_k(x, [R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m](x))$, при $k \leqslant m$,

17)$[R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m](x a_k) = [R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m](x)$, при $k > m$,

18) $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m](\overline{x}, \Lambda) = \Phi(\overline{x})$,

19) $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m](\overline{x}, y a_k) = \Psi_k(\overline{x}, y, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m](\overline{x}, y))$, при $k \leqslant m$,

20) $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m](\overline{x}, y a_k) = [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m](\overline{x}, y))$, при $k > m$.

Пусть $\mathbb{A}$ - некоторое множество аргументных слов. Аксиомы интерпретации неопределяемого функционального символа $\mathbf{U}$

a) $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, если $\alpha \in \mathbb{A}$,

b) $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$, если $\alpha \notin \mathbb{A}$.

Равенства ***a***) и ***b***) называются аксиомами интерпретации, которые соответствуют множеству $\mathbb{A}$, множество аргументных слов $\mathbb{A}$ называется интерпретационным множеством.

Правила вывода Исчисление равенств для замкнутых термов

$$\mathbf{Sb} : \frac{\mathbf{T_1} = \mathbf{Q_1}, \mathbf{T_2} = \mathbf{Q_2}}{[\mathbf{T_2}]^x_{\mathbf{T_1}} = [\mathbf{Q_2}]^x_{\mathbf{Q_1}}},\ \mathbf{Cut_1} : \frac{\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}, \mathbf{T_2} = \mathbf{T_3}}{\mathbf{T_1} = \mathbf{T_3}},\ \mathbf{Cut_2} : \frac{\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}, \mathbf{T_3} = \mathbf{T_2}}{\mathbf{T_1} = \mathbf{T_3}}.$$

В правиле $\mathbf{Sb}$ переменная x - собственная переменная этого правила.

Замечание. Для вычисления значений замкнутых термов, достаточно наряду с правилом $\mathbf{Sb}$ использовать только правило $\mathbf{Cut_1}$.

Для доказательства равенств замкнутых термов добавляется правило $\mathbf{Cut_2}$. Можно обойтись без правила $\mathbf{Cut}_2$, заменив правило $\mathbf{Sb}$ на правило $\dfrac{\mathbf{T_1} = \mathbf{Q_1}, \mathbf{T_2} = \mathbf{Q_2}}{[\mathbf{T_2}]^x_{\mathbf{Q_1}} = [\mathbf{Q_2}]^x_{\mathbf{T_1}}}$.

Определение вывода. Последовательность равенств $\mathbf{T}_1 = \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{T}_n = \mathbf{Q}_n$ является выводом(доказательством равенства $\mathbf{T}_n = \mathbf{Q}_n$), если для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, равенство $\mathbf{T}_i = \mathbf{Q}_i$ является либо аксиомой, либо аксиомой интерпретации $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda, \mathbf{U}(\alpha) = a_1$, которые соответствуют множеству $\mathbb{A}$, либо получено из предыдущих равенств по одному из правил вывода.

Если вывод $\mathbf{P}$ таков, что он содержит интерпретационные аксиомы $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$ или $\mathbf{U}(\beta) = a_1$, тогда будем говорить, что слова α, β были использованы в этом выводе, причём слово α использовано положительно, слово β использовано отрицательно. С выводом $\mathbf{P}$, при интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, свяжем пару множеств: $(\mathbb{A}^+)_\mathbf{P}$ - множество всех положительно опрошенных слов в выводе $\mathbf{P}$, $(\mathbb{A}^-)_\mathbf{P}$ - множество всех отрицательно опрошенных слов в выводе $\mathbf{P}$.

Последовательность равенств $t_1 = q_1, \dots, t_n = q_n$ - квазивывод, если каждое равенство в этой последовательности есть либо выводимое равенство, либо получено из предыдущих равенств по одному из правил вывода.

Замечание. Идея приведённого исчисления равенств для вычисления замкнутых оракульных термов была заимствована в работах [1-6] из которых основополагающей является[3].

Длина доказательства $\mathbf{P}$ - число равенств в доказательстве $\mathbf{P}$. Это число обозначается как $l_\mathbf{P}$.

Полная длина доказательства $\mathbf{P}$ - длина слова, полученного соединением всех равенств, входящих в доказательство $\mathbf{P}$, разделённых символом запятая. Это число обозначается $Fl_\mathbf{P}$.

Обозначим полученное исчисление замкнутых термов как $\mathbf{CalcEq}$, $\mathbf{CalcEq_U}$ в алфавите $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ соответственно.

Обозначение $\vdash t = r$ - равенство $t = r$ выводимо в исчислении $\mathbf{CalcEq_U}$, при любой интерпретации функтора $\mathbf{U}$.

Обозначение $\mathbb{A} \vdash t = r$ - равенство $t = r$ выводимо в исчислении $\mathbf{CalcEq_U}$, с аксиомами интерпретации соответствующими множеству $\mathbb{A}$.

Функтор Φ, терм t называются $n > 0$ алфавитным, если представленные слова не содержат функторов $\mathbf{S}_l$, при $l > n$. Все исходные функторы являются n алфавитными для каждого n.

Для каждого $n \geq 1$ и любого аргументного слова α можно построить n - местный функтор, обозначаемый как $\mathbf{Const}^n_\alpha$, что верно $\vdash \mathbf{Const}^n_\alpha(x_1,\dots,x_n)=\alpha$.

Теорема 1.1. Можно составить такой алгоритм, следуя которому для каждого терма t можно построить такой функтор Φ_t, что $\vdash \Phi_t(\overline{y})=t$, где $\overline{y}$ - список переменных, содержащий переменные терма t. Доказательство и полную формулировку этой теоремы см.в [2, стр. 62],[4, стр. 446].

Теорема 1.2. Для любого замкнутого n алфавитного терма t, для заданной интерпретации $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, существует единственное такое аргументное слово α того же алфавита, что $\mathbb{A}\vdash t=\alpha$. Доказательство проводится индукцией по построению функтора, затем индукцией по построению терма t.

Доказательство $\mathbf{P}$ равенства вида $t=\alpha$, где t - замкнутый терм, α - некоторое аргументное слово, будем называть вычислением терма t.

Замечание. Для любого терма $t(\overline{x})$, для любой последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, существует такое натуральное число k, что для любого интерпретационного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, можно построить такое вычисление терма $t(\overline{x})$ на $\overline{\alpha}$, в котором будет использовано не больше k аргументных слов.

Теорема 1.3. Пусть дан n - местный функтор $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ - некоторая последовательность аргументных слов. Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i,\overline{\alpha}}$ - вычисление функтора Ψ_i на последователности аргументных слов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, с результатом вычисления β_i, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, $1\leq i\leq k$. Пусть $\mathbf{P}_{\Phi,\overline{\beta}}$ - вычисление функтора Φ на последователности аргументных слов $\beta_1,\dots,\beta_k$, с результатом вычисления γ, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление $\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$ функтора $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$ на последователности аргументных слов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, для которого верно:
$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]},\overline{\alpha}}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}}\bigcup(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]},\overline{\alpha}}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}}\bigcup(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$.

Доказательство. Составим следующую последовательность равенств: $\mathbf{P}_{\Psi_1,\overline{\alpha}},\dots,\mathbf{P}_{\Psi_k,\overline{\alpha}}$,
$[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](x_1,\dots,x_n)=\Phi(\Psi_1(\overline{x}),\dots,\Psi_k(\overline{x})),\dots,$
$[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\dots,\Psi_k(\overline{\alpha})),\Phi(x_1,\dots,x_n)=\Phi(x_1,\dots,x_n),\dots,$
$\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\dots,\Psi_k(\overline{\alpha}))=\Phi(\beta_1,\dots,\beta_n),\mathbf{P}_\Phi,\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\dots,\Psi_k(\overline{\alpha}))=\gamma,[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\gamma$ - вычисление функтора $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$ на последовательности $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Теорема 1.4. Пусть дан $n+1(n\geq 1)$ - местный функтор $[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta a_i$ - некоторая последовательность аргументных слов.

Пусть $\mathbf{P}_\Phi$ - вычисление функтора Φ на последователности аргументных слов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k],\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta}$ - вычисление функтора $[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$ на последователности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, с результатом вычисления γ, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ - вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma$, с результатом вычисления η, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление

$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}$ функтора $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, для которого верно:

1. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi};\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi};\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$

2. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$

Доказательство. Пункт (1) - очевиден. Пункт (2). Составим следующую последовательность равенств:

$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}$,

$[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](x_1, \ldots, x_n, za_i) = \Psi(x_1, \ldots, x_n, z, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](x_1, \ldots, x_n, z)), \ldots,$

$[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i) = \Psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta))$,

$\Psi_i(x_1, \ldots, x_n, z, u) = \Psi_i(x_1, \ldots, x_n, z, u), \ldots,$

$\Psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)) = \Psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma)$,

$\mathbf{P}_{\Psi_i,\overline{\alpha}}$,

$\Psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)) = \eta$,

$[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i) = \eta$ - вычисление функтора $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i$, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Теорема 1.5. Пусть дан функтор $[R\alpha\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i$ - некоторая последовательность аргументных слов.

Пусть $\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta}$ - вычисление функтора $[R\alpha\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ на аргументном слове β, с результатом вычисления γ, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_i,\beta,\gamma}$ - вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов β, γ, с результатом вычисления η, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, тогда можно построить вычисление

$\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta a_i}$ функтора $[R\alpha\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ на аргументном слове βa_i, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, для которого верно:

1. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\Lambda}} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\Lambda}} = \emptyset$

2. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta}}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta}}$

Доказательство. Пункт (1) - очевиден. Пункт (2). Составим следующую последовательность равенств:

$\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\beta}$,

$[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](za_i) = \Psi_i(z,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](z))$

$[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\beta a_i) = \Psi_i(\beta,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\beta))$,

$\Psi_i(z,u) = \Psi_i(z,u),\ldots$,

$\Psi_i(\beta,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\beta)) = \Psi_i(\beta,\gamma)$,

$\mathbf{P}_{\Psi_i;\beta,\gamma}$,

$\Psi_i(\beta,[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\beta)) = \eta$,

$[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\beta a_i) = \eta$ - вычисление функтора $[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$ на последовательности аргументных слов βa_i, в интерпретационном множестве $\mathbb{A}$, с указанным множеством положительно и отрицательно опрошенных слов.

Учитывая, что $\mathbf{Length}(\Lambda) = \Lambda$, $\mathbf{Length}(\alpha a_i) = \mathbf{S}_1(\alpha)$. $|\Lambda| = \Lambda$, $|\alpha a_i| = |\alpha| + 1 = S(|\alpha|)$, $|x|$ - функция длины слова x, то выражение вида $\mathbf{Length}(t)$, будем обозначать в виде $|t|$. Очевидно, что аргументное слово α является натуральным числом, тогда и только тогда, когда $\vdash |\alpha| = \alpha$, $\mathbf{Length}(\alpha)$ - натуральное число.

Терм, содержащий только функторы вида: $\mathbf{Concat}, \mathbf{D}$, а также натуральные числа, называется словарным многочленом. Словарные многочлены будут обозначаться как $\mathbf{P}(\overline{x})$.

Из свойств: $|\mathbf{Concat}(x,y)| = |\mathbf{Concat}(|x|,y)| = |\mathbf{Concat}(x,|y|)| = \mathbf{Concat}(|x|,|y|) = |x| + |y|$, $|\mathbf{D}(x,y)| = \mathbf{D}(|x|,y) = |\mathbf{D}(x,|y|)| = \mathbf{D}(|x|,|y|) = |x| \cdot |y|$, получим $|\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)| = \mathbf{P}(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, $\forall\alpha\beta\gamma[\mathbf{Concat}(|\alpha|,|\beta|) = \gamma \vee \mathbf{D}(|\alpha|,\beta) = \gamma]$, тогда γ - натуральное число.

Для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{x})$, можно построить многочлен с натуральными коэффициентами $P^*(\overline{x})$, что верно равенство $P^*(|\overline{x}|) = |\mathbf{P}(\overline{x})|$.

Составим $3 \leq n -$ местный функтор вида $[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n\ldots[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n\mathbf{I}_n^n]\ldots]$. Для этого функтора в исчислении **CalcEq** выводимо равенство

$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n\ldots[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n\mathbf{I}_n^n]\ldots](x_1\ldots x_n) = \mathbf{Concat}(x_1,\mathbf{Concat}(x_2,\ldots\mathbf{Concat}(x_{n-1},x_n)\ldots))$.

Пусть $\mathbf{Concat}^n \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^n[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^n\ldots[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{n-1}^n\mathbf{I}_n^n]\ldots]$, при $n \geq 3$, тогда $\vdash \mathbf{Concat}^n(x_1,\ldots x_n) = \mathbf{Concat}(x_1,\mathbf{Concat}(x_2,\ldots\mathbf{Concat}(x_{n-1},x_n)\ldots))$. При $n = 2$, $\mathbf{Concat}^2 \rightleftharpoons \mathbf{Concat}$, при $n = 1$, $\mathbf{Concat}^1 \rightleftharpoons \mathbf{I}_1^1$ и выводимы равенства: $\vdash \mathbf{Concat}^2(x_1,x_2) = \mathbf{Concat}(x_1,x_2)$, $\vdash \mathbf{Concat}^1(x_1) = \mathbf{I}_1^1(x_1) = x_1$.

$\vdash \mathbf{Concat}^{n+1}(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concacat}^{n}(x_2, \ldots x_{n+1}))$.

Определение. Пусть $\mathscr{D}$ - некоторое множество n - алфавитных функторов. Для каждого множества $\mathbb{A}$ аргументных слов, определим понятие стандартной словарной модели, которую обозначим как $\mathbf{WordM}_{n,\mathbb{A},\mathscr{D}}$.

Носителем этой модели являются все n - алфавитные аргументные слова. Для каждого $k \geq 1$ - местного функтора $\Phi \in \mathscr{D}$ определим операцию, обозначаемую f_Φ и определяемую как $\forall \overline{\alpha} \forall \beta [f_\Phi(\overline{\alpha}) = \beta \iff \mathbb{A} \vdash \Phi(\overline{\alpha}) = \beta]$.

Если множество n - алфавитных функторов $\mathscr{D}$ совпадает с множеством всех n - алфавитных примитивно рекурсивных функторов, стандартную модель будем обозначать как $\mathbf{WordM}_{n,\mathbb{A}}$, $\mathbf{WordM}_n$, в алфавите $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, $\mathscr{L}$ соответственно или еще проще $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}$, $\mathbf{WordM}$.

Замечание. Отметим, что множество всех операций модели $\mathbf{WordM}_n$ совпадает с классом словарных функций $Pr(\Sigma)$, где Σ - алфавит, состоящий из n различных символов[1, p.220, Definition 3].

Рассмотрим следующие определяющие равенства:

$\mathbf{Exp}(x, \Lambda) = a_1$,

$\mathbf{Exp}(x, ya_i) = \mathbf{D}(x, \mathbf{Exp}(x, y))$.

Очевидно, что $|\mathbf{Exp}(x, y))| = \mathbf{Exp}(|x|, y)) = \mathbf{Exp}(|x|, |y|))$. Можно построить такой 2- х местный функтор, для которого будут верны эти определяющие соотношения.

Для каждого натурального числа $k > 1$ выпишем следующие определяющие равенства:

$exp_{\mathbf{k}}(\Lambda) = a_1$,

$exp_{\mathbf{k}}(\alpha a_i) = \mathbf{D}(\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{k-\text{раз}}, exp_{\mathbf{k}}(\alpha))$.

Имеется примитивно рекурсивный словарный функтор, удовлетворяющий этим определяющим равенствам. Обозначим его как $\mathbf{exp_k}$. Для функтора $\mathbf{exp_k}$ верно $\mathbf{WordM} \models \forall x[|\mathbf{exp_k}(x)| = k^{|x|}]$,

$\forall \alpha \beta [\mathbf{exp_k}(\alpha) = \beta]$, тогда β - натуральной число.

При $k > 1$ $\mathbf{exp_k}(\alpha)$ - число k - алфавитных слов длина которых равна длине слова α, $\dfrac{\mathbf{exp_k}(\alpha a_1) - 1}{\mathbf{k} - 1}$ - число k - алфавитных слов предшествующих в лексикографическом упорядочивании слову $|\alpha a_1|$.

Замечание. Для каждого натурального числа k верно $\mathbf{WordM} \models \forall x[|\mathbf{exp_k}(x)| = \mathbf{Exp}(k, x))$

Теорема 1.6. Имеется алгоритм, выполняя который, по произвольной формуле $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$ исчисления высказываний, в котором элементарные высказывания являютя высказывания вида $r = q$, где r, q - термы алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, можно можно построить n - местный функтор $\Phi_{\mathcal{A}}$, такой, что

$\forall \overline{\alpha} [\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow \mathbb{A} \vdash \Phi_{\mathcal{A}}(\overline{\alpha}) = \Lambda]$ $(\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}[\mathcal{A}(\overline{x}) \equiv \Phi_{\mathcal{A}}(\overline{x}) = \Lambda])$[4].

Для каждого исходного функтора: $\mathbf{I}^n_m, \mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ верно

$\vdash |\mathbf{I}^n_m(x_1, \ldots, x_n)| = \mathbf{I}^n_m(|x_1|, \ldots, |x_n|)$,

$\vdash |\mathbf{S}_k(x)| = \mathbf{S}_1(|x|)$,

$\vdash |\mathbf{Z}(x)| = \mathbf{Z}(|x|)$,

$\vdash |\boldsymbol{\delta}(x)| = \boldsymbol{\delta}(|x|)$,

$\vdash |\mathbf{Length}(x)| = \mathbf{Length}(|x|)$,

$\vdash |x_1 \dot{-} x_2| = |x_1| \dot{-} |x_2|$,

$\vdash |\mathbf{Concat}(x_1, x_2)| = \mathbf{Concat}(|x_1|, |x_2|)$,

$\vdash |\mathbf{D}(x_1, x_2)| = \mathbf{D}(|x_1|, |x_2|)$.

Part II

Простое вычисление функтора

С каждым n - местным функтором Φ и последовательностью аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, в дальнейшем обозначаемую как $\overline{\alpha}$, свяжем простое(каноническое) вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, обозначаемое как $\mathbf{P}_{\Phi;\alpha_1,\ldots\alpha_n}$. Это простое вычисление построим индукцией по построению функтора Φ, а внутри этой индукции, для рекурсивного функтора индукцией по построению аргументного слова. С каждым простым вычислением укажем множества $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\Phi;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ и $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\Phi;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ и длину вычисления $l_{\mathbf{P},\Phi}(\overline{\alpha})$ - число равентств в выводе $\mathbf{P}_{\Phi;\alpha_1,\ldots\alpha_n}$.

Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \mathbf{I}^n_m, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$:

Для функтора $\mathbf{S}_k$:

1. $\mathbf{S}_k(x) = \mathbf{S}_k(x)$,

2. $\mathbf{S}_k(\alpha) = \mathbf{S}_k(\alpha)$.

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{S}_k;\alpha} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{S}_k;\alpha} = \emptyset$.

Длина вычисления $l_{\mathbf{P},\mathbf{S}_k}(\alpha) = 2$.

Для функтора $\mathbf{Z}$:

1. $\mathbf{Z}(x_1) = \Lambda$,

2. $\mathbf{Z}(\alpha) = \Lambda$.

Длина вычисления $l_{\mathbf{P},\mathbf{Z}}(\alpha) = 2$.

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{Z};\alpha} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{Z};\alpha} = \emptyset$.

Для функтора $\mathbf{U}$:

$\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, если $\alpha \in \mathbb{A}$, иначе,

$\mathbf{U}(\alpha) = a_1$.

Длина вычисления $l_{\mathbf{P},\mathbf{U}}(\alpha) = 1$.

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{U};\alpha} = \{\alpha\}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{U};\alpha} = \emptyset$, если $\alpha \in \mathbb{A}$,

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{U};\alpha} = \emptyset$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{U};\alpha} = \{\alpha\}$, если $\alpha \notin \mathbb{A}$

Для функтора $\mathbf{I}^n_m$:

1. $\mathbf{I}^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$,

2. $\mathbf{I}^n_m(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m, \ldots,$,

$n+1$. $\mathbf{I}^n_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_m$.

Длина вычисления $l_{\mathbf{P},\mathbf{I}^n_m}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = n + 1$.

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{I}^n_m;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{I}^n_m;\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \emptyset$.

Для функтора $\boldsymbol{\delta}$:

1. $\boldsymbol{\delta}(\Lambda) = \Lambda$,

2. $\boldsymbol{\delta}(x_1 a_i) = x_1$,

3. $\boldsymbol{\delta}(\alpha a_i) = \alpha$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta}}}(\Lambda) = 1$,

$l_{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta}}}(\alpha) = 2$, при $\alpha \neq \Lambda$,

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\boldsymbol{\delta}} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\boldsymbol{\delta}} = \emptyset$.

Для функтора **Length**:

1. $|\Lambda| = \Lambda$,

1.$|x_1 a_k| = |x_1| a_1$,

2.$|\alpha a_k| = |\alpha| a_1$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Length};\alpha}$ - простое вычисление функтора **Length** на аргументном слове α, далее выписываем это простое вычисление $\mathbf{P}_{\mathbf{Length};\alpha}$, в конце этого вывода стоит равенство $|\alpha| = \gamma$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\mathbf{Length},\alpha}$,

3. $\mathbf{S}_1(x_1) = \mathbf{S}_1(x_1)$,

4. $\mathbf{S}_1(|\alpha|) = \mathbf{S}_1(\gamma)$,

5. $|\alpha a_k| = \gamma a_1$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\Lambda) = 1$,

$l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\alpha a_k) = l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\alpha) + 5$.

$l_{\mathbf{P},\mathbf{Length}}(\alpha) = 1 + 5 \cdot |\alpha|$,

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{Length}} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{Length}} = \emptyset$.

Для функтора $\dot{-}$:

1. $x_1 \dot{-} \Lambda = x_1$,

2. $\alpha \dot{-} \Lambda = \alpha$,

1. $x_1 \dot{-} x_2 a_k = \boldsymbol{\delta}(x_1 \dot{-} x_2)$,

2. $\alpha \dot{-} x_2 a_k = \boldsymbol{\delta}(\alpha \dot{-} x_2)$,

3. $\alpha \dot{-} \beta a_k = \boldsymbol{\delta}(\alpha \dot{-} \beta)$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\dot{-};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора $\dot{-}$ на аргументных словах α, β, далее выписываем это простое вычисление $\mathbf{P}_{\dot{-};\alpha,\beta}$, в конце этого вывода стоит равенство $\alpha \dot{-} \beta = \gamma$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\dot{-};\alpha,\beta}$,

4. $\boldsymbol{\delta}(z) = \boldsymbol{\delta}(z)$,

5. $\boldsymbol{\delta}(\alpha \dot{-} \beta) = \boldsymbol{\delta}(\gamma)$.

[Пусть $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta};\gamma}$ - простое вычисление функтора $\boldsymbol{\delta}$ на агрументном слове γ, в конце этого вывода стоит равенство вида $\boldsymbol{\delta}(\gamma) = \eta$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta},\gamma}$,

6. $\boldsymbol{\delta}(\alpha \dot{-} \beta) = \eta$,

7. $\alpha \dot{-} \beta a_k = \eta$,

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \Lambda) = 2$,

$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \beta a_k) = l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(\alpha, \beta) + l_{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta}}}(\alpha \dot{-} \beta) + 7$.

$$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}(\alpha,\beta)} = \begin{cases} 2 + 9 \cdot |\beta|, & if\ |\alpha| > |\beta| \geq 0; \\ |\alpha| + 8 \cdot |\beta|, & if\ 1 \leq |\alpha| \leq |\beta|; \\ 2 + 8 \cdot |\beta|, & if\ |\alpha| = \Lambda. \end{cases}$$

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\dot{-}} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\dot{-}} = \emptyset$.

Для функтора **Concat**:

1. $\mathbf{Concat}(x_1, \Lambda) = x_1$,

2. $\mathbf{Concat}(\alpha, \Lambda) = \alpha$,

1. $\mathbf{Concat}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2) a_k$,

2. $\mathbf{Concat}(\alpha, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, x_2) a_k$,

3. $\mathbf{Concat}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \beta) a_k$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора **Concat** на агрументных словах α и β, в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{Concat}(\alpha, \beta) = \gamma$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\beta}$,

4. $\mathbf{S}_k(x_1) = \mathbf{S}_k(x_1)$,

5. $\mathbf{S}_k(\mathbf{Concat}(\alpha, \beta)) = \mathbf{S}_k(\gamma)$,

6. $\mathbf{Concat}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{S}_k(\gamma)$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \Lambda) = 2$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \beta a_k) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \beta) + 6$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(\alpha, \beta) = 2 + 6 \cdot |\beta|$,

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{Concat}} = \emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{Concat}} = \emptyset$.

Для функтора **D**:

1. $\mathbf{D}(x_1, \Lambda) = \Lambda$,

2. $\mathbf{D}(\alpha, \Lambda) = \Lambda$,

1. $\mathbf{D}(x_1, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{D}(x_1, x_2))$,

2. $\mathbf{D}(\alpha, x_2 a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, x_2))$,

3. $\mathbf{D}(\alpha, \beta a_k) = \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta))$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{D};\alpha,\beta}$ - простое вычисление функтора **D** на агрументном слове α и слове β, в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{D}(\alpha, \beta) = \gamma$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\mathbf{D},\alpha,\beta}$,

4. $\mathbf{Concat}(x_1, x_2) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2)$,

5. $\mathbf{Concat}(\alpha, x_2) = \mathbf{Concat}(\alpha, x_2)$,

6. $\mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{D}(\alpha, \beta)) = \mathbf{Concat}(\alpha, \gamma)$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\mathbf{Concat};\alpha,\gamma}$ - простое вычисление функтора **Concat** на агрументном слове α, γ, в конце этого вывода стоит равенство вида $\mathbf{Concat}(\alpha,\gamma)=\eta$, продолжаем].

$\mathbf{P}_{\mathbf{Concat},\alpha,\gamma}$,

7. $\mathbf{Concat}(\alpha,\mathbf{D}(\alpha,\beta))=\eta$,

8. $\mathbf{D}(\alpha,\beta a_k)=\eta$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P_D}}(\alpha,\Lambda)=2$,

$l_{\mathbf{P_D}}(\alpha,\beta a_k)=l_{\mathbf{P_D}}(\alpha,\beta)+l_{\mathbf{P_{Concat}}}(\alpha,\mathbf{D}(\alpha,\beta))+8$,

$l_{\mathbf{P_D}}(\alpha,\beta)=2+10\cdot|\beta|+3\cdot|\alpha|\cdot|\beta|(|\beta|\dot{-}1)$,

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P},\mathbf{D}}=\emptyset$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P},\mathbf{D}}=\emptyset$.

Для функтора $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$:

Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_1;\overline{\alpha}}$ - простой вывод функтора Ψ_1 на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha},\ldots,$ $\mathbf{P}_{\Psi_k;\overline{\alpha}}$ - простой вывод функтора Ψ_k на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$.

Составим последовательность равенств:

$\mathbf{P}_{\Psi_1;\overline{\alpha}},\ldots,\mathbf{P}_{\Psi_k;\overline{\alpha}}$,

[В конце каждого вывода $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ находится равенство вида $\Psi_i(\overline{\alpha})=\gamma_i$, продолжаем]

$s+1$. $\Phi(x_1,\ldots,x_k)=\Phi(x_1,\ldots,x_k)$,

$s+2$. $\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),x_2,\ldots,x_k)=\Phi(\gamma_1,x_2,\ldots,x_k),\ldots,$

$s+\mathbf{k}+1$. $\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k(\overline{\alpha}))=\Phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\Phi;\overline{\gamma}}$ - простой вывод функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\gamma}$, в конце этого вывода находится равенство $\Phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)=\eta$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\Phi;\overline{\gamma}}$,

$s+\mathbf{k}+r+2$. $\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_1(\overline{\alpha}))=\eta$,

$s+\mathbf{k}+r+3$. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x_1,\ldots,x_n)=\Phi(\Psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\Psi_k(x_1,\ldots,x_n))$,

$s+\mathbf{k}+r+4$. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\alpha_1,\ldots,x_n)=\Phi(\Psi_1(\alpha_1,\ldots,x_n),\ldots,\Psi_k(\alpha_1,\ldots,x_n)),\ldots,$

$s+\mathbf{k}+r+\mathbf{n}+3$. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\Phi(\Psi_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ldots,\Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))$,

$s+\mathbf{k}+r+\mathbf{n}+4$. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\eta$ - полученная последовательность равенств - простое вычисление функтора $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha})=l_{\mathbf{P}_{\Psi_1}}(\overline{\alpha})+,\ldots,+l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\overline{\alpha})+l_{\mathbf{P}_\Phi}(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k(\overline{\alpha}))+\mathbf{n}+\mathbf{k}+4$.

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]};\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i};\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\bigcup(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi};\gamma_1,\ldots,\gamma_k}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}} = \bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i};\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\bigcup(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi};\gamma_1,\ldots,\gamma_k}$(см. теорему 1.3.).

Для $n \geq 2$ - местного функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$:

Составим последовательность равенств:

1. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](x_1,\ldots,x_n,\Lambda) = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$,

2. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,x_n,\Lambda) = \Phi(\alpha_1,\ldots,x_n),\ldots$,

$\mathbf{n}+1$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda) = \Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\Phi;\overline{\alpha}}$ - простой вывод функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, в конце этого вывода находится равенство $\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \gamma$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\Phi;\overline{\alpha}}$,

$\mathbf{n}+r+2$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda) = \gamma$,

[Пусть $\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m];\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}}$ - простой вывод функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$, в конце этого вывода находится равенство $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) = \beta$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m];\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}}$,

[Пусть $\mathbf{P}_{\Psi_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\beta}$ - простой вывод функтора Ψ_k] на последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\beta$, в конце этого вывода находится равенство $[\Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\beta) = \theta$, продолжаем]

$\mathbf{P}_{\Psi_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\beta}$,

$s+t+1$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}a_k) = \Psi_k(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}))$,

$s+t+2$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,x_n,x_{n+1}a_k) = \Psi_k(\alpha_1,\ldots,x_n,x_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,x_n,x_{n+1})),\ldots$,

$\mathbf{n}+s+t+2$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}a_k) = \Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}))$,

$\mathbf{n}+s+t+3$. $\Psi_k(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \Psi_k(x_1,\ldots,x_{n+2})$,

$\mathbf{n}+s+t+4$. $\Psi_k(\alpha_1,\ldots,x_{n+2}) = \Psi_k(\alpha_1,\ldots,x_{n+2}),\ldots$,

$2\mathbf{n}+s+t+4$. $\Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},x_{n+2}) = \Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},x_{n+2})$,

$2\mathbf{n}+s+t+5$. $\Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})) = \Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\beta)$,

$2\mathbf{n}+s+t+6$. $\Psi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})) = \theta$,

$2\mathbf{n}+s+t+7$. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}a_k) = \theta$ - эта последовательность равенств является простым выводом функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$.

Длина вычисления задаётся определяющими равенствами:

$l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]}}(\overline{\alpha},\Lambda) = l_{\mathbf{P}_{\Phi}}(\overline{\alpha}) + \mathbf{n} + 2$,

$l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]}}(\overline{\alpha},\alpha_{n+1}a_k) = l_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]}}(\overline{\alpha},\alpha_{n+1}) + l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\overline{\alpha},\alpha_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\overline{\alpha},\alpha_{n+1})) + 2\mathbf{n} + 7$

1. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\Lambda}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$

2. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i};\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i};\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$ (см. теорему 1.4.).

Случай, когда функтор рекурсии имеет вид $[R\alpha\Phi_1,\ldots,\Phi_m]$, разбирается аналогично.

Для него определяющие равенства длины простого вычисления таковы:

$l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m]}}(\Lambda) = 1$,

$l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m]}}(\alpha a_k) = l_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}}(\alpha) + l_{\mathbf{P}_{\Psi_k}}(\alpha,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m](\alpha)) + 7$

1. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\Lambda}} = \emptyset$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\Lambda}} = \emptyset$

2. $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i,\beta,\gamma}} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{[\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m],\beta}}$, (см. теорему 1.5),

Свойства простого вычисления функторов:

1. Последнее равенство простого вычисления $n-$ местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, является равенство вида $\Phi(\overline{\alpha}) = \beta$, где β - аргументное слово, которое называется результатом простого вычисления $n-$ местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$.

2. Простое вычисление $n-$ местного функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ состоит только из тех функторов, которые являются подфункторами функтора Φ. При этом используются только правила вывода $\mathbf{Sb}$ или $\mathbf{Sub}_1$.

3. Все опрашиваемые слова, при простом вычислении функтора $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, состоят из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_1 на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ и т.д. из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_m на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, где γ_i - результат вычисления функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$.

4. Все опрашиваемые слова, при простом вычислении функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha},\beta a_k$, состоят из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, из опрашиваемых слов функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ при простом вычислении на последователности аргументных слов $\overline{\alpha},\beta$(предыдущий шаг), из опрашиваемых слов, которые входят в простое вычисление функтора Ψ_k на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha},\beta,\gamma$ где γ - результат вычисления функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_m]$ на последоватеельности слов $\overline{\alpha},\beta$.

5. Любой n - местный функтор Φ можно интерпретировать как некоторый алгоритм, выполняя который, можно вычислить значение этого функтора на заданной последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Простое вычисление этого функтора на заданной последовательности аргументных слов является реализацией этого алгоритма.

Для каждого исходного функтора: $\mathbf{I}^n_m, \mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ верно

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{I}^n_m}}(x_1, \ldots, x_n) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{I}^n_m}}(|x_1|, \ldots, |x_n|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}}(x) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}}(|x|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{S}_k}}(x) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{S}_k}}(|x|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta}}}(x) = l_{\mathbf{P}_{\boldsymbol{\delta}}}(|x|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Length}}}(x) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Length}}}(|x|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(x_1, x_2) = l_{\mathbf{P}_{\dot{-}}}(|x_1|, |x_2|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(x_1, x_2) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{Concat}}}(|x_1|, |x_2|)$,

$l_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}}(x_1, x_2) = l_{\mathbf{P}_{\mathbf{D}}}(|x_1|, |x_2|)$.

Замечание. Пусть Φ - n - местный функтор алфавита $\mathscr{L}$, составленный из функторов $\mathbf{I}^n_m, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}$, $\dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ с помощью оператора суперпозиции J, тогда для этого функтора верно

$\vdash |\Phi(x_1, \ldots, x_n)| = \Phi(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Part III

Функтор ограниченной рекурсии, PPr функторы

Пусть Φ - произвольный n - местный функтор. Составим фукнктор $[J\Phi\mathbf{I}^{n+1}_1, \ldots \mathbf{I}^{n+1}_n]$ - введение $n+1$ фиктивной переменной, этот функтор обозначим как $[J\Phi_{n+1}]$.

Равенство вида $x \dot{-} y = \Lambda$ будем обозначать как $x \leqslant y$. Учитывая свойство $x \dot{-} y = \Lambda \Longleftrightarrow |x| \dot{-} |y| = \Lambda$, формулу вида $x \leqslant y$, будем записывать также в виде $|x| \leqslant |y|$.

$x \dot{-} y = \begin{cases} \Lambda, & \text{если } |x| \leq |y|; \\ z, & \text{иначе} \end{cases}$, где z - такое слово, которое является началом слова x и длина которого равна $|x| - |y|$.

Для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{y})$, учитывая, что $|\mathbf{P}(\overline{y})| = \mathbf{P}(|\overline{y}|)$, верно:

$|x| \leqslant |\mathbf{P}(\overline{y})| \Longleftrightarrow |x| \leqslant \mathbf{P}(|\overline{y}|)$.

Обозначим двухместный функтор $J[\dot{-}\mathbf{I}^2_1 J[\dot{-}\mathbf{I}^2_1\mathbf{I}^2_2]]$ как $\mathbf{min}$. Для этого функтора алфавита $\mathscr{L}$, в исчислении $\mathbf{CalcEq}$ выводимо равенство $\mathbf{min}(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_1 \dot{-} x_2)$.

Свойства: $\vdash \mathbf{min}(x_1, x_2) = \mathbf{min}(x_1, |x_2|)$, $\vdash |\mathbf{min}(x_1, x_2)| = \mathbf{min}(|x_1|, |x_2|)$

$\mathbf{min}(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq |y|; \\ z, & \text{иначе} \end{cases}$, где z - такое слово, которое является началом слова x и длина которого равна $|y|$.

$\forall\alpha\beta\mathbf{WordM} \models |\mathbf{min}(\alpha,\beta)| \leq |\beta|$.

Пусть $\mathbf{P}$ - n - местный многочленный функтор, Φ - n - местный функтор, Ψ - $n+1$ - местный функтор. Составим функторы: $[J\mathbf{min}\Phi, \mathbf{P}]$, $[J\mathbf{min}\Psi[J\mathbf{P}_{n+1}]]$ - функторы ограничения, соответственно без введения фиктивной переменной и с ведением фиктивной переменной. Эти функторы обозначим как $\mathbf{Bound}(\Phi,\mathbf{P})$, $\mathbf{Bound}(\Psi,\mathbf{P})$.

Пусть Φ - n - местный функтор, $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$ - $n+2$ - местные функторы, $\mathbf{P},\mathbf{P}_1$ - соответственно n, $n+1$ - местные многочленные функторы. Составим функтор $[R\mathbf{Bound}(\Phi,\mathbf{P}),\mathbf{Bound}(\Psi_1,\mathbf{P}_1),\ldots,\mathbf{Bound}(\Psi_k,\mathbf{P}_1)]$ - функтор ограниченной рекурсии.

Для каждого функтора ограниченной рекурсии $\Gamma \rightleftharpoons [R\mathbf{Bound}(\Phi,\mathbf{P}),\mathbf{Bound}(\Psi_1,\mathbf{P}_1),\ldots,\mathbf{Bound}(\Psi_k,\mathbf{P}_1)]$ выводимы равенства:

$\vdash \Gamma(x_1,\ldots,x_n,\Lambda) = \mathbf{min}(\Phi(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n))$,

$\vdash \Gamma(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{S}_k(x_{n+1})) = \mathbf{min}(\Psi_k(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\Gamma(x_1,\ldots,x_{n+1})),\mathbf{P}_1(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}))$,

для любого множества аргументных слов $\mathbb{A}$ верно: $\forall\overline{\alpha},\forall\beta \neq \Lambda \;\; \mathbb{A} \vdash |\Gamma(\overline{\alpha},\Lambda)| \leqslant |\mathbf{P}(\overline{\alpha})|$, $\mathbb{A} \vdash |\Gamma(\overline{\alpha},\beta)| \leqslant |\mathbf{P}_1(\overline{\alpha},\beta)|$.

Индуктивно определим множество функторов, обозначаемое как $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$:

1) Слово вида $\mathbf{U}$ - полиномиальная программа;

2) Слова вида $\mathbf{Z}$, $\boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}$, $\mathbf{S}_k, \mathbf{I}_n^m$, $\dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ - полиномиальные программы;

3) Если Φ - k - местный функтор, $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$ - n - местные функторы и являются полиномиальными программами, то функтор $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$ - полиномиальная программа, т.е. принадлежит множеству $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$;

4) Если Φ - n - местный функтор, $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$ - $n+2$ - местные функторы и являются полиномиальными программами, $\mathbf{P},\mathbf{P}_1$ - соответственно n, $n+1$ - местные многочленные функторы, то функтор $[R\mathbf{Bound}(\Phi,\mathbf{P}),\mathbf{Bound}(\Psi_1,\mathbf{P}_1),\ldots,\mathbf{Bound}(\Psi_k,\mathbf{P}_1)]$- полиномильная программа.

Множество функторов определённых согласно пунктам 2-4, будем также называть полиномиальными программами, но в алфавите $\mathscr{L}$. Это множество функторов будем обозначать как $\mathbf{PPr}$.

Замечание. Множество всех операций стандартной словарной модели $\mathbf{WordM}_{n,\mathbf{PPr}}$ совпадает с классом функции $E_2(\Sigma)$[1, p.220. Definition 7], где Σ - алфавит, состоящий из $n \geq 2$ различных символов.

Если из контекста будет понятно или будет не важно в каком алфавите $\mathscr{L}$ или $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, рассматривается множество $\mathbf{PPr}$ или $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, тогда будем просто обозначать $\mathbf{PPr}$.

Теорема 3.1. Пусть Φ - n - местная полиномиальная программа, т.е. $\Phi \in \mathbf{PPr}$, тогда существует(можно построить), такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\overline{x})$ той же местности, что для любого набора аргументных слов $\overline{\alpha}$ верно:

a) $\forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models |\Phi(\overline{\alpha})| < |\mathbf{P}(\overline{\alpha})|$.

b) $\forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models l_{\mathbf{P}_\Phi}(\overline{\alpha}) < |\mathbf{P}(\overline{\alpha})|$;

c) $\forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models Fl_{\mathbf{P}_\Phi}(\overline{\alpha}) < |\mathbf{P}(\overline{\alpha})|$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по построению функтора $\mathbf{PPr}$, используя при этом свойства простого вычисления, стр. 10 - 15.

Пусть $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ - n - местный функтор, тогда существует такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\overline{x})$, что для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, любых аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, длина всех опрашиваемых слов в простом вычислении функтора Φ на $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и число опрошенных слов ограничены $|\mathbf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|$.

Замечание. Пусть $\mathbf{MT}$ - оракульная машина Тьюринга с входным алфавитом $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ $(k \geq 2)$, и оракульным множеством $\mathbb{B}$, время работы которой ограничено некоторым многочленом $P(x_1, \ldots, x_n)$ с натуральными коэффициентами. Пусть $f_{\mathbf{MT}}(x_1, \ldots, x_n)$ - словарная функция, которая, порождена рассматриваемой оракульной $\mathbf{MT}$. Тогда можно построить такой функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ той же местности множеством входных слов которого, является множество аргументных слов $\{\mathbf{S}_1(\Lambda), \ldots, \mathbf{S}_k(\Lambda)\}$, что верно $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta\ \mathbb{B} \vdash \Phi(\alpha_1 \ldots, \alpha_k) = \beta \Longleftrightarrow f_{\mathbf{MT}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \beta$[1 p. 224. Theorem 6][2][5, Теорема 1 стр 228][3].

Замечание. Пусть $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ - n - местный функтор, множеством входных слов которого, является множество аргументных слов $\{\mathbf{S}_1(\Lambda), \ldots, \mathbf{S}_k(\Lambda)\} (k \geq 2)$. Пусть $\mathbb{B}$ - интепретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Тогда можно построить оракульную машину Тьюринга $\mathbf{MT}$ - с входным алфавитом $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и оракульным множеством $\mathbb{B}$, время работы которой ограничено некотором многочленом $P(x_1, \ldots, x_n)$ с натуральными коэффициентами, что для словарной функции $f_{\mathbf{MT}}(x_1, \ldots, x_n)$, которая порождена рассматриваемой оракульной $\mathbf{MT}$ верно $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta\ \mathbb{B} \vdash \Phi(\alpha_1 \ldots, \alpha_k) = \beta \Longleftrightarrow f_{\mathbf{MT}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \beta$[[1 p. 224. Theorem 7][5, Теорема 1 стр. 230].

Пусть $\mathbb{A}$ - интепретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Индуктивно определим множество функторов, обозначаемое как $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$:

[2]Эта теорема легко переносится в случае когда рассматриваемя машина Тьюринга, является оракульной

[3]Все указанные на станицах 212-215 словарные функции являются $\mathbf{PPr}$ функциями, алфавита $\mathscr{L}$, рассматриваемая теорема легко переносится на оракульную машину Тьюринга

1) Слово вида $\mathbf{U}$ - $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программа;

2) Слова вида $\mathbf{Z}$, $\boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}$, $\mathbf{S}_k, \mathbf{I}^m_n$, $\dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}$ - $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программы;

3) Если Φ - k - местный функтор, $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ - n - местные функторы и являются $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программами, то функтор $[J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ - $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программа,

4) Если Φ - n - местный функтор, $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ - $n{+}2$ - местные функторы и являются $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ программами, $\mathbf{P}$ - $n{+}1$ - словарный многочлен, тогда, если верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}, y\{|[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{x}, y)| \leq |\mathbf{P}(\overline{x}, y)|\}$, тогда функтор $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ - $\mathbf{PPr}(\mathbb{A})$ - программа.

Замечание. Если $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\overline{x})$, что верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}\{|\Phi(\overline{x})| \leq |\mathbf{P}(\overline{x})|\}$.

Замечание. Для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, для любого оракула $\mathbb{A}$, верно $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$.

Замечание. Пусть $\mathbb{A}$ - интепретация оракульного символа $\mathbf{U}$. Для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}(\mathbb{A})$, можно построить такой функтор $\Psi \in \mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, что верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}[\Phi(\overline{x}) = \Psi(\overline{x})]$.

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по построению функтора Φ, а внутри этой индукции, индукцией по построению аргументного слова.

Замечание. Отметим, что для отношения $\mathbf{exp_k}(x) = y$ можно составить функтор $\mathbf{EXP_k}$, принадлежащий $\mathbf{PPr}$, такой, что $\mathbf{WordM} \models \forall xy[\mathbf{exp_k}(x) = y \Leftrightarrow \vdash \mathbf{EXP_k}(x, y) = \Lambda]$.

Part IV

Функциональные слова и их свойства

Составим следующий словарный терм $\mathbf{Concat}(|\alpha|, \mathbf{Concat}(a_2, \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{Concat}(\beta, \mathbf{Concat}(a_2, a_2)))))$. Пусть 1 - обозначение аргументного слова $S_1(\Lambda)$, 2 - обозначение аргументного слова $S_2(\Lambda)$, тогда словарный терм $\mathbf{Concat}(|\alpha|, \mathbf{Concat}(a_2, \mathbf{Concat}(\alpha, \mathbf{Concat}(\beta, \mathbf{Concat}(a_2, a_2)))))$ для наглядности будем обозначать в виде $\underbrace{1, \ldots, 1}_{|\alpha|\text{- раз}} 2\alpha\beta 22$.

Пусть $\mathbf{c}$ - такой функтор, для которого в исчислении $\mathbf{CalcEq}$ выводимо равенство

$\mathbf{c}(x, y) = \underbrace{1, \ldots, 1}_{|x|\text{- раз}} 2xy22 = |x|2xy22.$

Пусть дана произвольная последовательность пар аргументных слов $(\alpha_1, \gamma_1) \ldots, (\alpha_n, \gamma_n)$(не обязательно различных пар). Эту последовательность будем называть функциональной, если выполняются условия:

1. $\forall i[\gamma_i = \Lambda \vee \gamma_i = a_1]$,

2. $\forall i, j[\alpha_i = \alpha_j \rightarrow \gamma_i = \gamma_j]$.

Введём понятие, которое в дальнейшем будет иметь важное значение.

Определение. 1. Λ - функциональное слово.

2. Если последовательность пар $(\alpha_1, \gamma_1) \ldots, (\alpha_n, \gamma_n)$ является функциональной, то слово вида $\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_1, \gamma_1), \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_2, \gamma_2), \ldots, \mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\alpha_k, \gamma_k), \Lambda)), \ldots,)$ - функциональное слово, при $1 \leq k \leq n$.

Наглядно функциональное слово можно записать в виде $|\alpha_1|2\alpha_1\gamma_1 22, \ldots, |\alpha_k|2\alpha_k\gamma_k 22$.

Слова последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ будем называть областью определения рассматриваемого функционального слова, а слова последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ соответсвующими значениями.

Замечание. Любое функциональное слово θ будем интерпретировать как слово согласно его определения и как функцию с тем же именем. Область определения и множество значений функции θ - область определения и множество значений функционального слова θ, причём $\theta(\alpha) = \Lambda$, тогда и только тогда, когда слово $\mathbf{c}(\alpha, \Lambda)$ - подслово слова θ и $\theta(\alpha) = a_1$, тогда и только тогда, когда слово $\mathbf{c}(\alpha, a_1)$ - подслово слова θ.

Область определения функционального слова θ будем обозначать как $dom(\theta)$.

Пусть θ - некоторое функциональное слово. Для этого функционального слова построим множество аргументных слов, определяемое как $\mathbb{A}_\theta = \{\alpha : \alpha \in dom(\theta) \text{ и } \theta(\alpha) = \Lambda\}$.

Для любого терма $t(\overline{x})$, для любой последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, для любого множества аргументных слов $\mathbb{A}$, можно построить такое фукциональное слово $\theta_{\overline{\alpha},\mathbb{A},t}$, согласованное с множеством $\mathbb{A}$, что для любого аргументного слова β верно $\mathbb{A} \vdash t(\overline{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \mathbb{A}_{\theta_{\overline{\alpha},\mathbb{A},t}} \vdash t(\overline{\alpha}) = \beta$. Для этого достаточно построить вычисление замкнутого терма $t(\overline{\alpha})$ на множестве $\mathbb{A}$, собрать все опрошенные слова в этом вычислении и составить по полученным опрошенным словам, соответствующее функциональное слово. Разумеется, так составленное функциональное слово зависит от построенного вычисления терма $t(\overline{\alpha})$, но при этом будет выполено свойство: для любого функционального слова $\theta \supseteq \theta_{\overline{\alpha},\mathbb{A},t}$, верно $\mathbb{A} \vdash t(\overline{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \mathbb{A}_\theta \vdash t(\overline{\alpha}) = \beta$. Это свойство верно для любого бескванторного предложения Φ(предложение, составленной с помощью логических связок из равенств замкнутых термов): $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Phi \Leftrightarrow \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}_\theta} \models \Phi$.

Пусть $\mathbf{Fw}$ - такой функтор алфавита $\mathscr{L}$, для которого верно:

1. $\forall\alpha[\vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = \Lambda \vee \vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = a_1]$;

2. $\vdash \mathbf{Fw}(\alpha) = \Lambda \Leftrightarrow \alpha$ - функциональное слово;

3. Функтор $\mathbf{Fw}$ - $\mathbf{PPr}$ функтор.

Введём бинарное отношение $x \in dom(\theta)$:

$x \in dom(\theta) \Longleftrightarrow \mathbf{WordM} \models \mathbf{Fw}(\theta) \wedge (|x|2x22 \text{ или } |x|2x122 \text{ есть подслово слова } \theta)$.

Отнешение $x \in dom(\theta)$ принадлежит **PPr** алфавита $\mathscr{L}$, где $\mathbf{Fw}(x) \leftrightharpoons \mathbf{Fw}(x) = \Lambda$

Введём бинарное отношение $\theta \subseteq \theta_1$:

$\theta \subseteq \theta_1 \Longleftrightarrow \mathbf{WordM} \models \mathbf{Fw}(\theta) \wedge \mathbf{Fw}(\theta_1) \wedge \forall x \in dom(\theta)[\theta(x) = \theta_1(x)]$.

Отнешение $\theta \subseteq \theta_1$ принадлежит **PPr** алфавита $\mathscr{L}$.

Введём бинарное отношение $\boldsymbol{\approx}$:

$\mathbf{WordM} \models \theta \boldsymbol{\approx} \theta_1 \Longleftrightarrow \mathbf{Fw}(\theta) \wedge \mathbf{Fw}(\theta_1) \wedge dom(\theta) = dom(\theta_1) \wedge \forall x \in dom(\theta)\theta(x) = \theta_1(x)$.

Отношение $x \boldsymbol{\approx} y$ принадлежит **PPr** алфавита $\mathscr{L}$.

Замечание. Если $\theta \boldsymbol{\approx} \theta_1$, тогда $\mathbf{Concat}(\theta, \theta_1) \boldsymbol{\approx} \mathbf{Concat}(\theta_1, \theta) \wedge$ $\mathbf{Concat}(\theta, \theta_1) \boldsymbol{\approx} \theta \wedge \theta \subseteq \theta_1 \wedge \theta_1 \subseteq \theta$.

Пусть **G** - есть такой двух местный функтор, алфавита $\mathscr{L}$, который удовлетворяет следущим условиям:

1. Если θ - функциональное слово, $\alpha \in dom(\theta)$ и $\theta(\alpha) = \gamma$, тогда $\vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = \gamma$.

2. Если θ - функциональное слово, $\alpha \notin dom(\theta)$, тогда $\vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1$.

3. Если θ - не является функциональным словом, тогда $\forall \alpha \vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_1$.

4. Функтор **G** - **PPr** функтор.

Функтор **G** обладает свойствами:

1. Для любых функциональных слов θ, θ_1, таких, что $\theta \subseteq \theta_1$, верно $\forall \alpha \in dom(\theta) \vdash [\mathbf{G}(\theta, \alpha) = \mathbf{G}(\theta_1, \alpha)]$.

2. Отношение вида $x \subset \mathbf{U} \rightleftharpoons [\mathbf{Fw}(x) = \Lambda] \& \forall z \in dom(x)[(\mathbf{G}(x, z) = \Lambda \Rightarrow \mathbf{U}(z) = \Lambda) \& (\mathbf{G}(x, z) = a_1 \Rightarrow \mathbf{U}(z) = a_1)]$ принадлежит **PPr** т.е. существует такой одноместный **PPr** функтор $\boldsymbol{\varphi}$ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, что для любого интерпретационного множества аргументных слов $\mathbb{A}$ верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x[x \subset \mathbf{U} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}(x) = \Lambda]$.

3. $\forall \mathbb{A} \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \alpha(\mathbf{G}(|\alpha|2\alpha\mathbf{U}(\alpha)22, \alpha) = \mathbf{U}(\alpha))$.

Функциональное слово θ согласуется с множеством $\mathbb{A}$ ($\theta \subset \mathbb{A}$), если $\forall x \in dom(\theta)[\theta(x) = \Lambda \Longleftrightarrow x \in \mathbb{A}]$, ($\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \theta \subset \mathbf{U}$).

Замечание. Для любых функциональных слов θ_1, θ_2, которые согласованы с множеством $\mathbb{A}$, существует функциональное слово θ, согласованное с множеством $\mathbb{A}$ и $\theta_1 \subseteq \theta$, $\theta_2 \subseteq \theta$, например

$\theta_1 \cup \theta_2(\mathbf{Concat}(\theta_1, \theta_2))$.

Определение. Пусть дан функтор Φ, последовательность аргументных слов $\overline{\alpha}$ и интерпретационное множество $\mathbb{A}$. Пусть **P** - простое вычисление функтора Φ, на последовательности $\overline{\alpha}$, в интерпретации $\mathbb{A}$. Тогда, используя простое вычисление **P**, составим функциональное слово:

1. Выпишем все слова из множества $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi,\overline{\alpha}}}$. Пусть это будут слова $\beta_1, \ldots, \beta_k$, расположим их, например, в лексикографическом порядке.

2. Выпишем все слова из множества $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi,\overline{\alpha}}}$. Пусть это будут слова $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, расположим их, также в лексикографическом порядке.

3. Составим функциональное слово

$\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\beta_1,\Lambda),\dots,\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\beta_k,\Lambda),\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\gamma_1,a_1),\dots,\mathbf{Concat}(\mathbf{c}(\gamma_{s-1},a_1),\mathbf{c}(\gamma_s,a_1))),\dots,)$. Так составленное функциональное слово назовём функциональным словом составленным согласно простого вычисления $\mathbf{P}$ функтора Φ на последовательности $\overline{\alpha}$, в интерпретации $\mathbb{A}$. Обозначим такое функциональное слово как $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$.

Определение. Термы вида $|x|2x\mathbf{U}(x)22|z|2z\mathbf{U}(z)22,\dots,|\mathrm{v}|2\mathrm{v}\mathbf{U}(\mathrm{v})22$ будем называть функциональными термами алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Множество так построенных функциональных термов будем обозначать как $\mathbf{F}\mathrm{term}_{\mathbf{U}}$, а конкретный функциональный терм этого множества, как $f_{\mathbf{term}}(x,z,\dots,\mathrm{v})$.

Определение. Термы вида $|x|2x\mathbf{G}(\mathbf{y},x)22|z|2z\mathbf{G}(\mathbf{y},z)22,\dots,|\mathrm{v}|2\mathrm{v}\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathrm{v})22$ будем называть функциональными термами алфавита $\mathscr{L}$. Множество так построенных функциональных термов будем обозначать как $\mathbf{F}\mathrm{term}$, а конкретный функциональный терм этого множества, как $f^*_{\mathbf{term}}(\mathbf{y},x,z,\dots,\mathrm{v})$.

Свойства. 1. $\forall\mathbb{A}$ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}\models f^*_{\mathbf{term}}(f_{\mathbf{term}}(x,z,\dots,\mathrm{v}),x,z,\dots,\mathrm{v})=f_{\mathbf{term}}(x,z,\dots,\mathrm{v})$ - как слова.

2. $\mathbf{WordM}\models f^*_{\mathbf{term}}(f^*_{\mathbf{term}}(x,z,\dots,\mathrm{v}),x,z,\dots,\mathrm{v})=f^*_{\mathbf{term}}(x,z,\dots,\mathrm{v})$ - как слова.

3. Для любого функционального слова θ верно $\forall x,z,\dots,\mathrm{v}\in dom(\theta)\mathbf{WordM}\models f^*_{\mathbf{term}}(\theta,x,z,\dots,\mathrm{v})\subseteq\theta$.

Определение функтора для построения функционального слова

Для каждого n - местного функтора Φ, определим свзянную с этим функтором, функтор построения функционального слова.

Определение проведём индукцией по построению функтора Φ.

1. Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k,\mathbf{Z},\boldsymbol{\delta},\mathbf{Length},\dot{-},\mathbf{Concat},\mathbf{D},\mathbf{I}^n_k$, $\mathbf{U}$:

$\Theta_{\mathbf{S}_k}=\mathbf{Z}$, $\Theta_{\mathbf{Z}}=\mathbf{Z}$, $\Theta_{\boldsymbol{\delta}}=\mathbf{Z}$, $\Theta_{\mathbf{Length}}=[J\mathbf{Z}\mathbf{I}^2_2]$, $\Theta_{\dot{-}}=[J\mathbf{Z}\mathbf{I}^2_2]$, $\Theta_{\mathbf{Concat}}=[J\mathbf{Z}\mathbf{I}^2_2]$, $\Theta_{\mathbf{D}}=[J\mathbf{Z}\mathbf{I}^2_2]$, $\Theta_{\mathbf{I}^n_k}=[J\mathbf{Z}\mathbf{I}^n_k]$, $\Theta_{\mathbf{U}}=[J\mathbf{c}\mathbf{I}^1_1\mathbf{U}]$.

Для этих функторов в исчислении $\mathbf{CalcEq}$ выводимы равенства: $\Theta_{\mathbf{S}_k}(x_1)=\Lambda$, $\Theta_{\mathbf{Z}}(x_1)=\Lambda$, $\Theta_{\boldsymbol{\delta}}=\Lambda$, $\Theta_{\mathbf{Length}}(x_1)=\Lambda$, $\Theta_{\dot{-}}(x_1,x_2)=\Lambda$, $\Theta_{\mathbf{Concat}}(x_1,x_2)=\Lambda$, $\Theta_{\mathbf{D}}(x_1,x_2)=\Lambda$, $\Theta_{\mathbf{I}^n_k}(x_1,\dots,x_n)=\Lambda$,

$\vdash\Theta_{\mathbf{U}}(x_1)=\mathbf{c}(x_1,\mathbf{U}(x_1))$ - в исчилении $\mathbf{CalcEq}_{\mathbf{U}}$ и верно $\forall\alpha\ \forall\mathbb{A}\ \mathbb{A}\vdash\mathbf{G}(\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha),\alpha)=\mathbf{U}(\alpha)$.

2. Пусть Φ - k - местный функтор($k\geq 2$), $\Psi_1,\dots,\Psi_k$ - n - местные функторы, составим функтор суперпозиции $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$. Для функтора $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$ построим функтор $\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$.

Пусть для функтора Φ построен функтор Θ_Φ, для функтора Ψ_1 построен функтор Θ_{Ψ_1}, и т.д. для функтора Ψ_k построен функтор Θ_{Ψ_k}, тогда

$\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]} \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k],\Theta_{\Psi_1}\dots\Theta_{\Psi_k}]$ при $k \geq 2$. Полученный функтор является n - местным и для него верны следующие доказуемые равенства

$\vdash [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k],\Theta_{\Psi_1}\dots\Theta_{\Psi_k}](x_1,\dots,x_n) =$

$\mathbf{Concacat}^{k+1}([J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k](x_1,\dots,x_n),\Theta_{\Psi_1}(x_1,\dots,x_n)\dots\Theta_{\Psi_k}(x_1,\dots,x_n))$

$\vdash \mathbf{Concat}^{k+1}([J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k](x_1,\dots,x_n),\Theta_{\Psi_1}(x_1,\dots,x_n)\dots\Theta_{\Psi_k}(x_1,\dots,x_n)) =$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(x_1\dots,x_n)\dots\Psi_k(x_1,\dots,x_n)),\Theta_{\Psi_1}(x_1,\dots,x_n)\dots\Theta_{\Psi_k}(x_1,\dots,x_n))$.

Итак, имеем $\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1,\dots,x_n) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k],\Theta_{\Psi_1}\dots\Theta_{\Psi_k}](x_1,\dots,x_n) =$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(x_1,\dots,x_n)\dots\Psi_k(x_1,\dots,x_n)),\Theta_{\Psi_1}(x_1,\dots,x_n)\dots\Theta_{\Psi_k}(x_1,\dots,x_n))$,

$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1,\dots,x_n) = \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(x_1,\dots,x_n)\dots\Psi_k(x_1,\dots,x_n)),\Theta_{\Psi_1}(x_1,\dots,x_n)\dots\Theta_{\Psi_k}(x_1,\dots,x_n))$,

$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x}) = \mathbf{Concat}([J\Theta_\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x}),(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\overline{x}),\dots,\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\overline{x}),\Theta_{\Psi_k}(\overline{x}))),\dots,)$.

Пусть Φ - k - местный функтор($k=1$), тогда $\Theta_{[J\Phi\Psi_1]} \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_\Phi\Psi_1]\Theta_{\Psi_1}]$, тогда

$\Theta_{[J\Phi\Psi_1]}(x_1,\dots,x_n) \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_\Phi\Psi_1]\Theta_{\Psi_1}](x_1,\dots,x_n) = \mathbf{Concat}(\Theta_\Phi(\Psi_1(x_1,\dots,x_n)),\Theta_\Psi(x_1,\dots,x_n))$

3. Для функтора вида $[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]$ и функтора вида $[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$. Пусть для функтора Φ построен функтор Θ_Φ, для функтора Ψ_1 построен функтор Θ_{Ψ_1}, и т.д. для функтора Ψ_k построен функтор Θ_{Ψ_k}, тогда для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$ в исчислении $\mathbf{CalcEq_U}$ имеет место (определяющее равенство)(см. теорему 1.1)[4] :

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\Lambda) = \Lambda$.

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x_1,[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](x_1)),\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1))$, при $i \leq k$.

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1a_i) = \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(x_1)$, при $i > k$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1}a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},x_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x},x_{n+1})),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1}))$, при $i \leq k$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1}a_i) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1})$, при $i > k$.

Теорема 4.1. Пусть Φ - функтор алфавмта $\mathscr{L}$, тогда в исчислении **CalEq** верно $\vdash \Theta_\Phi(\overline{x}) = \Lambda$.

Доказательство проводится индукцией по построеию функтора Φ, а внутри этой индукции, индукцией по построению аргументного слова.

Теорема 4.2. Пусть Φ - произвольный функтор, который принадлежит **PPr**, тогда функтор Θ_Φ принадлежит **PPr**.

Доказательство проводится индукцией по построению **PPr** функтора Φ, а внутри этой индукции, индукцией по построению аргументного слова.

[4] см. Приложение

Теорема 4.3. Пусть Φ - произвольный $n-$ местный функтор. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$, любой последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}, \beta$, верно:

Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\overline{\alpha}) = \beta$, тогда слово β - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по построению функтора.

База индукции. Для исходных функторов $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}^n_k$ доказательство получается непосредственно. Для функтора $\mathbf{U}$, получим: $\mathbb{A} \vdash \Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) = \beta$, тогда и только тогда, когда $(\beta = |\alpha|2\alpha 22 \& \alpha \in \mathbb{A}\ ) \vee (\beta = |\alpha|2\alpha a_1 22 \& \alpha \notin \mathbb{A})$, тогда $\beta = \theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}}$ и $\beta \subset \mathbb{A}$.

Индукционное предположение 1. Пусть теорема верна для функтора Φ, функторов $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$. Докажем, что теорема верна для функтора $[J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$.

По индукционному предположению имеем: если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_1}(\overline{\alpha}) = \gamma_1, \ldots, \mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_k}(\overline{\alpha}) = \gamma_k$, тогда γ_i - функциональные слова и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_1,\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \gamma_1 \subset \mathbb{A}, \ldots, \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_k,\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \gamma_k \subset \mathbb{A}$.

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_i,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, составлено согласно множествам $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}}$. тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_i,\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\overline{\alpha}), \ldots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\overline{\alpha}), \Theta_{\Psi_k}(\overline{\alpha})), \ldots,)$.

Имеем $\mathbb{A} \vdash \Psi_i(\overline{\alpha}) = \beta_i$. Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \eta$, тогда по индукционному предположению, η - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\beta_1,\ldots,\beta_k,\mathbb{A}} \subseteq \eta \subset \mathbb{A}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\beta},\mathbb{A}}$ составлено согласно множествам $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$, тогда

$\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\beta_1,\ldots,\beta_k,\mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_\Phi(\beta_1, \ldots, \beta_k), \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\overline{\alpha}), \ldots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\overline{\alpha}), \Theta_{\Psi_k}(\overline{\alpha})), \ldots,)$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\mathbb{A}}$ составлено согласно множествам

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]},\overline{\alpha}} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]},\overline{\alpha}} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\overline{\alpha}} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\beta}}$, тогда, согласно определяющему равенству для $\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}) \subset \mathbb{A}$.

Индукционное предположение 2. Пусть теорема верна для функтора Φ, функторов $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$. Докажем, что теорема верна для функтора $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$.

Согласно определяющим равенствам для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}$, имеем:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x}, za_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x}, z, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{x}, z)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x}, z))$.

База индукции.

По индукционному предположению имеем:

$\mathbb{A} \vdash \Theta_\Phi(\overline{\alpha}) = \beta$ - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}} \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$ построено по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\alpha}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\alpha}}$. Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\Lambda,\mathbb{A}}$ построено также по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\alpha}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_\Phi,\overline{\alpha}}$, учитывая определяющее равенство

$\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{\alpha})$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\Lambda,\mathbb{A}} \subseteq \beta$ и $\beta \subset \mathbb{A}$.

Индукционный переход. Возьмём последовательность аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n.\beta a_i$.

По индукционному переходу имеем:

Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta) = \gamma$, тогда γ - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta,\mathbb{A}} \subseteq \gamma \subset \mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta) = \eta$.

Если $\mathbb{A} \vdash \Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha}, \beta, \eta) = \xi_i$, тогда ξ_i - функциональное слово и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_i,\overline{\alpha},\beta,\eta,\mathbb{A}} \subseteq \xi_i \subset \mathbb{A}$.

Согласно определения функционального слова $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta,\mathbb{A}}$ оно построено по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta}}$, тогда

$\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta,\mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta))$.

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta a_i,\mathbb{A}}$ строится по множествам:

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},,\overline{\alpha},\beta,\eta} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta}}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},,\overline{\alpha},\beta,\eta} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta}}$, тогда

$\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta a_i,\mathbb{A}} = \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_i,\overline{\alpha},\beta,\eta,\mathbb{A}} \bigcup \theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta,\mathbb{A}}$, тогда

$\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta a_i,\mathbb{A}} \subseteq \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta))$. Учитывая определяющее равенство $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)), \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta))$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha},\beta a_i,\mathbb{A}} \subseteq \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}, \beta a_i) \subset \mathbb{A}$. Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично.

Теорема 4.4 Пусть Φ - произвольный $n-$ местный функтор алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$, любой последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, верно:

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Phi}(\overline{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_{\Phi}}(\overline{\alpha})$[5].

Доказательство проводится индукцией по построению функтора Φ, носит чисто синтаксический характер. На содержательном уровне это отношение является очевидным. Неформально, Θ_{Φ} - неподвижная точка оператора Θ.

Замечание. Пусть Φ - произвольный $n-$ местный функтор алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Для любого интерпретационного множества $\mathbb{A}$ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}[\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{x},\mathbb{A}} \approx \Theta_{\Phi}(\overline{x})]$.

Part V

Преобразование выражений алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, в выражения алфавита $\mathscr{L}$

Индукцией по построению функтора, построим преобразование, обозначаемое как $*$, функтора алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ в функтор алфавита $\mathscr{L}$.

Для исходных функторов:

[5]см. Приложение

1. $(\mathbf{S}_k)^* = [J\mathbf{S}_k\mathbf{I}_2^2]$,

2. $(\mathbf{Z})^* = [J\mathbf{Z}\mathbf{I}_2^2]$,

3. $(\boldsymbol{\delta})^* = [J\boldsymbol{\delta}\mathbf{I}_2^2]$,

4. $(\mathbf{U})^* = \mathbf{G}$,

5. $(\mathbf{Length})^* = [J\mathbf{Length}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,

6. $(\dot{-})^* = [J\dot{-}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,

7. $(\mathbf{Concat})^* = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,

8. $(\mathbf{D})^* = [J\mathbf{D}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]$,

9. $(\mathbf{I}_k^n)^* = [J\mathbf{I}_k^n\mathbf{I}_2^{n+1}, \ldots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+1}]$,

1. $([J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k])^* = [J(\Phi)^*\mathbf{I_1^{n+1}}(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*]$,

2. $([R\alpha\Phi_1, \ldots, \Phi_m])^* = [R\mathbf{Const}_\alpha^1(\Phi_1)^*, \ldots, (\Phi_m)^*]$,

3. $([R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_m])^* = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_m)^*]$.

Замечание. Если функтор Φ - функтор алфавита $\mathscr{L}$, тогда первый аргумент функтора $(\Phi)^*$ - фиктивная переменная: $\vdash \Phi(\overline{x}) = (\Phi)^*(\mathbf{y}, \overline{x})$.

Теорема 5.1. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ $\forall\mathbb{A}$, $\forall\overline{\alpha}$ $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$ верно $\mathbb{A} \vdash [\Phi(\overline{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha})]$ $(\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models [\Phi(\overline{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha})])$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по построению функтора, внутри этой индукции для рекурсивного функтора, доказательство проводится индукцией по построению аргументного слова.

База индукции. Исходные функторы

Для исходных функторов: $\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}_k^n$ можно убедиться непосредственно, выписав указанный функтор ϕ и функтор $(\phi)^*$.

Докажем теорему для функтора $\mathbf{U}$. Согласно определения $(\mathbf{U})^* = \mathbf{G}$, необходимо показать $\forall\mathbb{A}$ $\forall\alpha$ $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}}$ $\mathbb{A} \vdash [\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)]$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$ - аксиома и является простым вычислением функтоа $\mathbf{U}$ на слове α. В качестве функционального слова возьмём слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}} = \mathbf{c}(\alpha, \Lambda) = |\alpha|2\alpha22$, тогда согласно определения функтора $\mathbf{G}$, получим $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}} \vdash \mathbf{G}(\theta, \alpha) = \Lambda$. Пусть $\mathbf{P}_{\theta,\alpha}$ - (например)простой вывод функтора $\mathbf{G}$ на последовательности слов θ, α, тогда последовательность равенств $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda, \mathbf{P}_{\theta,\alpha}, \mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$ - вывод равенства $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta, \alpha)$, при интерпретации функционального символа $\mathbf{U}$ множеством $\mathbb{A}$.

Аналогично: пусть $\alpha \notin \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$ - аксиома и является простым вычислением функтора $\mathbf{U}$ на слове α. В качестве функционального слова возьмём слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}} = \mathbf{c}(\alpha, a_1) = |\alpha|2\alpha a_1 22(|\alpha|2\alpha 122)$, тогда согласно определения функтора $\mathbf{G}$, получим $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathbf{U},\alpha,\mathbb{A}}$, $\vdash \mathbf{G}(\theta,\alpha) = a_1 (\vdash \mathbf{G}(\theta,\alpha) = 1)$. Пусть $\mathbf{P}_{\theta,\alpha}$ - простой вывод функтора $\mathbf{G}$ на последовательности аргументных слов θ, α, тогда последовательность равенств $\mathbf{U}(\alpha) = a_1, \mathbf{P}_{\theta,\alpha}, \mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta,\alpha)$ - вывод равенства $\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{G}(\theta,\alpha)$, при интерпретации функционального символа $\mathbf{U}$ множеством $\mathbb{A}$.

$\boldsymbol{a}$). **Индукционное предположение**. Пусть теорема верна для функторов: $\Phi, \Psi_1, \ldots, \Psi_k$, докажем теорему для функтора $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$. Обозначим $\mathfrak{f} \leftrightharpoons [J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$.

Имеем ($\boldsymbol{a}$): для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, для функтора Ψ_1, верно $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_1,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Psi_1(\overline{\alpha}) = (\Psi_1)^*(\theta,\overline{\alpha})$,..., для функтора Ψ_k, верно $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_k,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Psi_k(\overline{\alpha}) = (\Psi_k)^*(\theta,\overline{\alpha})$;

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\beta_1,\ldots,\beta_k$, для функтора Φ, верно $\forall\theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\beta},\mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Phi(\overline{\beta}) = (\Phi)^*(\theta,\overline{\beta})$.

Функциональное слово $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, согласно его определения, составлено по множествам: $(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha}}} = \bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i,\overline{\alpha}}} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Phi,\overline{\gamma}}}$, $(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\overline{\alpha}}} = \bigcup\limits_{i=1}^{k}(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i,\overline{\alpha}}} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Phi,\overline{\gamma}}}]$, тогда $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\mathbb{A}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_i,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$ и $\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\mathbb{A}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\beta},\mathbb{A}}$. Пусть $\theta_{\mathfrak{f}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\mathbb{A}}$.

Следующая последовательность равенств:

1. $(\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}) = \gamma_1,\ldots,(\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}) = \gamma_k$ - вычисляем,

2.$(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\gamma_1,\ldots,\gamma_k) = \eta$ - вычисляем,

3. $[J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi)_k^*](\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}) = (\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},(\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi)_k^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}))$ - почти аксиома,

4. $(\Phi)^*(\boldsymbol{y},x_1,\ldots,x_k) = (\Phi)^*(\boldsymbol{y},x_1,\ldots,x_k)$ - аксиома,

5. $(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},(\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi)_k^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})) = (\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ - из 1,4,

6. $(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},(\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi)_k^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})) = \eta$ - из 2,5,

7. $[J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi)_k^*](\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}) = \eta$ - из 3,6,

[Равенства 1-7 доказываютя в исчислении **CalcEq**]

8. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha}) = \Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k(\overline{\alpha}))$ - почти аксиома,

9. $\Psi_1(\overline{\alpha}) = (\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k(\overline{\alpha}) = (\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$ - индукционое предположение,

10. $\Phi(x_1,\ldots,x_k) = \Phi(x_1,\ldots,x_k)$ - аксиома,

11.$\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_1(\overline{\alpha})) = \Phi((\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}))$ - из 9,10,

12. $\Phi((\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})) = \Phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ - из 1,10,

13. $\Phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k) = (\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ - индукционное предположение,(полагаем в ($\boldsymbol{a}$) $\beta_i = \gamma_i$)

14. $\Phi(\gamma_1,\ldots,\gamma_k) = \eta$ - из 2,13,

15. $\Phi((\Psi_1)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha}))=\eta$ - из 12,14,

16. $\Phi(\Psi_1(\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_1(\overline{\alpha}))=\eta$ - из 11,15,

17. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha})=\eta$ - из 8,16,

18. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha})=[J(\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi)_k^*](\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$- из 7,17

19. $[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha})=([J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$ - из 18 - квазивыод при итерпретационном множестве $\mathbb{A}$, т.е. в исчислении $\mathbf{CalcEq}_{\mathbb{A}}$.

b). **Индукционное предположение**. Пусть теорема верна для функторов: $\Phi,\Psi_1,\ldots,\Psi_k$, докажем теорему для функтора $\mathfrak{f}\leftrightharpoons[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$.

По индукционному предположению имеем:

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, для функтора Φ, верно $\forall\theta\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, и $\mathbb{A}\vdash\Phi(\overline{\alpha})=(\Phi)^*(\theta,\overline{\alpha})$;

для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma$, для функтора Ψ_1, верно $\forall\theta\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_1,\overline{\alpha},\beta,\gamma,\mathbb{A}}$, $\mathbb{A}\vdash\Psi_1(\overline{\alpha})=(\Psi_1)^*(\theta,\overline{\alpha},\beta,\gamma)$,..., для функтора Ψ_k, верно $\forall\theta\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Psi_k,\overline{\alpha},\beta,\gamma,\mathbb{A}}$, $\mathbb{A}\vdash\Psi_k(\overline{\alpha})=(\Psi_k)^*(\theta,\overline{\alpha},\beta,\gamma)$.

Далее доказательство будет проводится индукцией по построениею аргументного слова.

База индукции. Докажем, что для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, верно $\forall\theta_{\mathfrak{f}}\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\Lambda}$ $\mathbb{A}\vdash[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\theta_{\mathfrak{f}},\Lambda)$.

Согласно определения преобразования"$*$"имеем: $([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*=[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*]$, следовательно, необходимо доказать $\forall\theta_{\mathfrak{f}}\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\Lambda}$ $\mathbb{A}\vdash[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},\Lambda)$.

Следующая последовательность равенств:

1. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\boldsymbol{y},\overline{x},\Lambda)=(\Phi)^*(\boldsymbol{y},\overline{x})$ - аксиома,

2. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha},\Lambda)=(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$ - из 1;

[Равенства 1,2 доказываютя в исчислении **CalcEq**]

[Учитывая, что $\theta_{\mathfrak{f}}\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\mathfrak{f},\overline{\alpha},\Lambda}\supseteq\theta_{\mathbf{SimpleFw},\Phi,\overline{\alpha},\mathbb{A}}$, получим]

3. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=\Phi(\overline{\alpha})$ - почти аксиома,

4. $\Phi(\overline{\alpha})=(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$ - индукционное предположение,

5. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=(\Phi)^*(\theta_{\mathfrak{f}},\overline{\alpha})$ - из 3,4,

6. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f},},\overline{\alpha},\Lambda)$ -из 2,5

7. $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\Lambda)=([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\theta_{\mathfrak{f},},\overline{\alpha},\Lambda)$ из 6 - квазивывод при интерпретационном множестве $\mathbb{A}$.

Индукционный переход. По индукционному предположению имеем: для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, для любой последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, верно

$\forall \theta_{\mathfrak{f}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta}$ $\mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},, \overline{\alpha}, \beta)$;

б) Для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma$, верно:

$\forall \theta \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \overline{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}$, $\mathbb{A} \vdash \Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, \gamma) = (\Psi_i)^*(\theta, \overline{\alpha}, \beta, \gamma)$.

Требуется доказать, что для функтора $\mathfrak{f}$, для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i$, верно

$\forall \theta_{\mathfrak{f}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta a_i}$ $\mathbb{A} \vdash [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta a_i) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},, \overline{\alpha}, \beta a_i)$.

Составим функциональное слово согласно множествам:

$(\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^+)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$,

$(\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}} = (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{\Psi_i},\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta,\gamma} \bigcup (\mathbb{A}^-)_{\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta}}$, где $\mathbf{P}_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k],\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta a_i}$ - простое вычисленние функтора $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$ на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta a_i$, $\mathbf{P}_{\Psi_i}$ - простое вычисление функтора Ψ_i на последовательности аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma$, получим $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta a_i}$, тогда $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta a_i} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \Psi_i, \overline{\alpha}, \beta, \gamma, \mathbb{A}}$, $\theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta a_i} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta}$. Возьмём $\theta_{\mathfrak{f}} \supseteq \theta_{\mathbf{SimpleFw}, \mathfrak{f}, \overline{\alpha}, \beta a_i}$

Следующая последовательность равенств:

1. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta) = \gamma$ - вычисляем,

2. $(\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, \gamma) = \eta_i$ - вычисляем,

3. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta a_i) = (\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta))$ - почти аксиома,

4. $(\Psi_i)^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}, z, u) = (\Psi_i)^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}, z, u)$ - аксиома,

5. $(\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta)) = (\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, \gamma))$ - из 1,4,

6. $(\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta)) = \eta_i$ - из 2,5,

7. $[R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta a_i) = \eta_i$ - из 3,6,

[Равенства 1-7 доказываютя в исчислении **CalcEq**]

8. $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta a_i) = \Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta))$ - почти аксиома,

9. $[R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},, \overline{\alpha}, \beta)$ - индукционное предположение,

10.$\Psi_i(\overline{x}, u, v) = \Psi_i(\overline{x}, u, v)$ - аксиома,

11. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta))$ - из 9,10,

12. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 1,10,

13. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, \gamma) = (\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ - индукционое предположение,

14. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)) = \Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 11,12,

15. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)) = (\Psi_i)^*(\theta_{\mathfrak{f}}, \overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ - из 13,14,

16. $\Psi_i(\overline{\alpha}, \beta, [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta)) = \eta_i$ - из 2,15,

17. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta a_i) = \eta_i$ - из 8,16,

18. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta a_i) = [R(\Phi)^*(\Psi_1)^*, \dots, (\Psi_k)^*](\theta_{\mathfrak{f}},, \overline{\alpha}, \beta a_i)$ - из 7,17

19. $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\overline{\alpha}, \beta a_i) = ([R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k])^*(\theta_{\mathfrak{f}},, \overline{\alpha}, \beta a_i)$ - из 18 - квазивывод при итерпретационном множестве $\mathbb{A}$, т.е. в исчислении $\mathbf{CalcEq}_{\mathbb{A}}$.

Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично.

Следствие 5.2. 1. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ $\forall\mathbb{A}$, $\forall\overline{\alpha}$ верно $\mathbb{A} \vdash [\Phi(\overline{\alpha}) = \Phi^*(\Theta_\Phi(\overline{\alpha}), \overline{\alpha})]$ ($\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Phi(\overline{\alpha}) = \Phi^*(\Theta_\Phi(\overline{\alpha}), \overline{\alpha})]$).

2. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ $\forall\mathbb{A}, \forall\overline{\alpha}$ $\forall\theta \supseteq \Theta_\Phi(\overline{\alpha})$, верно $\mathbb{A} \vdash [\Phi(\overline{\alpha}) = \Phi^*(\theta, \overline{\alpha})]$ ($\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Phi(\overline{\alpha}) = \Phi^*(\theta, \overline{\alpha})]$),

3. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ $\forall\mathbb{A}, \forall\overline{\alpha}, \beta$ $\forall\theta \supseteq \Theta_\Phi(\overline{\alpha})$, верно $\mathbb{A} \vdash \Phi(\overline{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \vdash \Phi^*(\theta, \overline{\alpha}) = \beta]$ ($\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Phi(\overline{\alpha}) = \beta \Leftrightarrow \mathbf{WordM} \models \Phi^*(\theta, \overline{\alpha}) = \beta$).

4. Для любого n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ $\forall\overline{\alpha}$ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\Theta_\Phi(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}) = \Theta_\Phi(\overline{\alpha})$ - как равенство слов(наименьшая неподвижная точка: $\forall\theta \supseteq \Theta_\Phi(\overline{\alpha})[(\Theta_\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha}) \subseteq \theta]$ $\{\forall\theta \supseteq \Theta_\Phi(\overline{\alpha})[\Theta_\Phi(\overline{\alpha}) = (\Theta_\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha})]\}$, причём, если $\Theta_\Phi(\overline{\alpha}) \neq \Lambda$, тогда $dom(\Theta_\Phi(\overline{\alpha})) = dom((\Theta_\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha}))$ для любого любого функционального слова θ. **См. теорему 4.4**.

Замечание. Пусть Φ - произвольный n - местный функтор алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$. Простое вычисление функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ можно разложить на два вычисления: простое вычисление функтора Θ_Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ и затем простое вычисление функтора $(\Phi)^*$ алфавита $\mathscr{L}$ на последовательности аргументых слов $\Theta_\Phi(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}$. Причём область определения функционального слова $\Theta_\Phi(\overline{\alpha})$ состоит из тех и только тех аргументных слов, которые были использованы в простом вычислении функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ и при любом расширении функционального слова $\Theta_\Phi(\overline{\alpha}) \subseteq \theta$, необязательно согласованного с оракульным множеством $\mathbb{A}$, результат простого вычисления функтора $(\Phi)^*$ на последовательности $\Theta_\Phi(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}$ совпадёт с результатом простого вычисления этого же функтора $(\Phi)^*$ на последовательности $\theta, \overline{\alpha}$(аналог "Принципа использования"("**Use Principle**") оракульных вычислений, например на машинах **Тьюринга**) и как ранее отмечалось $(\Theta_\Phi)^*(\theta, \overline{\alpha}) \subseteq \theta$ - "**Use Principle**"сыграет в дальнейшем важную роль при перенесении(распространении) этого фундаментального понятия, связанное с вычислениями в стандартной модели, на нестандартные модели.

Если в простом вычислении функтора Φ на последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$ каждую интерпретационную аксиому вида $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, заменить на равенство вида $\mathbf{G}(|\alpha|2\alpha22, \alpha) = \Lambda$(заменить на равенство вида $\mathbf{G}(\theta, \alpha) = \Lambda$, где $|\alpha|2\alpha 22 \subset \theta$), аксиому вида $\mathbf{U}(\alpha) = a_1$, заменить на равенство вида $\mathbf{G}(|\alpha|2\alpha a_1 22, \alpha) = a_1$(заменить на равенство вида $\mathbf{G}(\theta, \alpha) = a_!$, где $|\alpha|2\alpha a_1 22 \subset \theta$), то полученная последовательность равенств будет квазивыводом, который не будет содержать интерпретационных аксиом, причём этот квазивывод можно легко преобразовать в вывод алфавита $\mathscr{L}$, заменив указанные равенства на их, например, простые выводы.

Теорема 5.3. Для произвольного n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, для произвольных аргументных слов $\overline{\alpha}$, β, γ, если $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \overline{\alpha}) = \gamma$, тогда γ - функциональное слово.

Доказательство проводится индукцией по построению функтора Φ.

Теорема 5.4. Для произвольного n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{\alpha}\forall\beta[\Theta_\Phi(\overline{\alpha}) = \beta \Longrightarrow (\Theta_\Phi)^*(\beta, \overline{\alpha}) = \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}]$.

Доказательство. Для произвольных аргументных слов $\overline{\alpha}, \beta$ имеем $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\overline{\alpha}) = \beta \Longleftrightarrow (\Theta_\Phi)^*(\Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}) = \beta$, учитывая теорему 4.4, получим $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \overline{\alpha}) = \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}$.

Теорема 5.5. Пусть для n - местного функтора Φ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, для аргументных слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для множества аргументных слов $\mathbb{A}$, для функционального слова β верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_\Phi)^*(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq \beta \wedge \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq \beta$.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по построению функтора Φ.

База индукции. Φ - исходный функтор, например $\mathbf{U}$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}} = [J\mathbf{c}\mathbf{I}_1^1\mathbf{U}]$, тогда $(\Theta_{\mathbf{U}})^* = [J\mathbf{c}^*\mathbf{I}_1^2[J\mathbf{I}_1^1\mathbf{I}_2^2]\mathbf{G}]$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = \mathbf{c}^*(\beta, \alpha, \mathbf{G}(\beta, \alpha)) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22.$($\vdash \mathbf{c}^*(x, y, z) = \mathbf{c}(y, z)$, см **Замечание** стр.27). Пусть $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) \subseteq \beta$ и $\beta \subset \mathbb{A}$, тогда $|\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 \subseteq \beta$.

Разберём случаи:

a) $\mathbf{G}(\beta, \alpha) = \Lambda$, тогда $\beta(\alpha) = \Lambda$, тогда $\alpha \in \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = \Lambda$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) = |\alpha|2\alpha 22$, учитывая, что $(\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 = |\alpha|2\alpha 22 \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) \subseteq \beta$;

b) $\mathbf{G}(\beta, \alpha) = 1$, тогда $\beta(\alpha) = 1$, тогда $\alpha \notin \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{U}(\alpha) = 1$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) = |\alpha|2\alpha 122$, учитывая, что $(\Theta_{\mathbf{U}})^*(\beta, \alpha) = |\alpha|2\alpha\mathbf{G}(\beta, \alpha)22 = |\alpha|2\alpha 122 \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{\mathbf{U}}(\alpha) \subseteq \beta$.

Для остальных исходных функторов доказательство достаточно наглядное.

Индукционное предположение 1). Пусть теорема верна для k - местного функтора Φ, для n - местных функторов $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$. Докажем теорему для функтора $[J\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]$. Имеем

$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x}) = \mathbf{Concat}([J\Theta_\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k](\overline{x}), (\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\overline{x}), \ldots, \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\overline{x}), \Theta_{\Psi_k}(\overline{x}))), \ldots,)$,

тогда $\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}) = \mathbf{Concat}([J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \ldots, (\Psi_k)^*](\boldsymbol{y}, \overline{x}), (\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}),$
$\ldots, \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}), (\Theta_{\Psi_k})^*(\boldsymbol{y}, \overline{x}))), \ldots,)$[6], тогда

[6]для уточнения, см. Приложение

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha}) = \mathbf{Concat}([J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\beta,\overline{\alpha}),(\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(\beta,\overline{\alpha}),$ $\ldots,\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(\beta,\overline{\alpha}),(\Theta_{\Psi_k})^*(\beta,\overline{\alpha}))),\ldots,)$.

Пусть $(\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha}) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $[J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*,\ldots,(\Psi_k)^*](\beta,\overline{\alpha}) = (\Theta_\Phi)^*(\beta,(\Psi_1)^*(\beta,\overline{\alpha}),\ldots,$ $(\Psi_k)^*(\beta,\overline{\alpha})) \subseteq \beta$ и $(\Theta_{\Psi_1})^*(\beta,\overline{\alpha}) \subseteq \beta,\ldots,(\Theta_{\Psi_k})^*(\beta,\overline{\alpha}) \subseteq \beta$.

По индукционному предположению получим $\Theta_\Phi((\Psi_1)^*(\beta,\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi_k)^*(\beta,\overline{\alpha})) \subseteq \beta$, а также $\Theta_{\Psi_1}(\overline{\alpha}) \subseteq \beta,\ldots,\Theta_{\Psi_k}(\overline{\alpha}) \subseteq \beta$, тогда $\Psi_1(\alpha) = (\Psi_1)^*(\beta,\overline{\alpha}),\ldots,\Psi_k(\alpha) = (\Psi_k)^*(\beta,\overline{\alpha})$, тогда $\Theta_\Phi((\Psi_1)^*(\beta,\overline{\alpha}),\ldots,(\Psi_k)^*(\beta,\overline{\alpha})) = \Theta_\Phi(\Psi_1(\alpha),\ldots\Psi_k(\alpha))$, тогда $\Theta_\Phi(\Psi_1(\alpha),\ldots\Psi_k(\alpha)) \subseteq \beta$, тогда $\mathbf{Concat}([J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{x}),(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_1}(\overline{x}),\ldots,\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_{k-1}}(\overline{x}),\Theta_{\Psi_k}(\overline{x}))),\ldots,) \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha}) \subseteq \beta$.

Индукционное предположение 2). Пусть теорема верна для n - местного функтора Φ, для $n+2$ - местных функторов $\Psi_1,\ldots,\Psi_k$. Докажем теорему для $n+1$ - местного функтора $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$.

Имеем: $\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1}a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},x_{n+1},[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{x},x_{n+1})),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x},x_{n+1}))$, тогда $\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\boldsymbol{y},\overline{x},\Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\boldsymbol{y},\overline{x})$, $\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\boldsymbol{y},\overline{x},x_{n+1}a_i) =$ $\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\boldsymbol{y},\overline{x},x_{n+1},([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\boldsymbol{y},\overline{x},x_{n+1})),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\boldsymbol{y},\overline{x},x_{n+1}))$[7], тогда

c) $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\beta,\overline{\alpha})$,

d) $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma a_i) =$

$= \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma))$.

Случай (***c***). Пусть $(\Theta_\Phi)^*(\beta,\overline{\alpha}) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$. По инлукционному предположению получим $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\overline{\alpha}) \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) \subseteq \beta$.

Случай (***d***). Пусть $(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma a_i) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)) \subseteq \beta$, тогда $(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma) \subseteq \beta$, тогда по индкционному предположению, получим $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma) \subseteq \beta$, тогда $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma) = \delta \Longleftrightarrow (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)) = \delta$ и $\delta \subseteq \beta$. Далее учитывая $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])(\overline{\alpha},\gamma)) = \eta \Longleftrightarrow ([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma),\overline{\alpha},\gamma)) = \eta$ и $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma) \subseteq \beta$, получим $[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])(\overline{\alpha},\gamma)) = \eta \Longleftrightarrow ([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma),\overline{\alpha},\gamma)) = \eta$, тогда

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)) =$

$= \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\gamma)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma))$.

Имеем $(\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma)) \subseteq \beta$, тогда $(\Theta_{\Psi_i})^*(\beta,\overline{\alpha},\gamma,[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\gamma)) \subseteq \beta$, тогда по индукционному предположению, получим $\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha},\gamma,[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\gamma)) \subseteq \beta$, тогда

[7] см. Приложение

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha},\gamma,[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k](\overline{\alpha},\gamma)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma))\subseteq\beta$, тогда $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\gamma a_i)\subseteq\beta$ и $\beta\subset\mathbb{A}$.

Остальные аксиомы рекурсии(15,16,17,20) рассматриваются аналогично, тогда

$\forall\overline{x}\forall y\{\mathbf{Fw}(y)\Rightarrow[[(\Theta_\Phi)^*(y,\overline{x})\subseteq y\wedge y\subset\mathbf{U}]\Rightarrow\Theta_\Phi(\overline{x})\subseteq y]\}\in\mathbf{Th}(\mathbf{U})$(см. стр.39).

Следствие 5.6. Для произвольного n - местного функтора Φ, для произвольной последовательности аргументных слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, для произвольного множества аргументных слов $\mathbb{A}$, существует единственное функциональное слово β, такое, что верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}\models\Theta_\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\beta\Longleftrightarrow\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}\models(\Theta_\Phi)^*(\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\beta\wedge\beta\subset\mathbf{U}$, тогда

$\forall\overline{x}\exists!y[(\Theta_\Phi)^*(y,\overline{x})=y\wedge y\subset\mathbf{U}]\in\mathbf{Th}(\mathbf{U})$, $\forall\overline{x}\exists!y\{[\Theta_\Phi(\overline{x})=y\equiv[(\Theta_\Phi)^*(y,\overline{x})=y\wedge y\subset\mathbf{U}]\}\in\mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Следствие 5.7. Пусть для n - местного функтора Φ, для последовательности аргументных слов $\overline{\alpha}$, для функционального слова β верно $\mathbf{WordM}\models(\Theta_\Phi)^*(\beta,\overline{\alpha})=\beta$, тогда можно построить такое интерпретационное множество $\mathbb{B}$ оракульного символа $\mathbf{U}$, что верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{B}}\models[(\Theta_\Phi)^*(\beta,\overline{\alpha})=\beta\wedge\beta\subset\mathbf{U}\wedge\Theta_\Phi(\overline{\alpha})=\beta]$.

Ограниченные формулы. Универсальное функциональное слово

Определим понятие ограниченной формулы Ψ и сопровождающее это понятие, множества, обозначаемые как Bwp_Ψ, Vwp_Ψ.

1) Всякая бескванторная формула $\mathcal{A}$ является ограниченной формулой, $Bwp_{\mathcal{A}}=\emptyset$, $Vwp_{\mathcal{A}}=\emptyset$;

2) Пусть $\mathcal{A}$ - ограниченная формула и $z\notin Bwp_{\mathcal{A}}\bigcup Vwp_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)$ - словарный многочлен, переменные которого, не принадлежат множеству $Bwp_{\mathcal{A}}\bigcup Vwp_{\mathcal{A}}$, тогда формула

$\mathcal{B}\rightleftharpoons\exists z[|z|\leqslant|\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)|\wedge\mathcal{A}]$ или $\mathcal{B}\rightleftharpoons\forall z[|z|\leqslant|\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)|\supset\mathcal{A}]$ - ограниченная формула,

$Bwp_{\mathcal{B}}=\{z\}\bigcup Bwp_{\mathcal{A}}$, $Vwp_{\mathcal{B}}=\{x_1,\ldots,x_n\}\bigcup Vwp_{\mathcal{A}}$

Такую формулу будем обозначать в виде $\exists_z^{|\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)|}\mathcal{A}$ или $\forall_z^{|\mathbf{P}(x_1,\ldots,x_n)|}\mathcal{A}$.

Ограниченная формула $\mathcal{A}$ называется $\exists(\forall)$ ограниченной формулой с параметрами или без них, если она имеет вид $\exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|},\ldots\exists_{z_k}^{|\mathbf{P}_k(\overline{x})|}\mathcal{B}(z_1,\ldots z_k,\overline{x};y_1,\ldots,y_k)$ $(\forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|},\ldots\forall_{z_k}^{|\mathbf{P}_k(\overline{x})|}\mathcal{B}(z_1,\ldots z_k,\overline{x};y_1,\ldots,y_k))$, где $\mathcal{B}(z_1,\ldots z_k,\overline{x};y_1,\ldots,y_k)$ - бескванторная формула.

Замечание. $\forall\Phi\ \forall\overline{\alpha}\ \forall\mathbf{P}(\overline{x})$: **1**. $\mathbf{Word}_{\mathbb{A}}\models\exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Phi(\overline{\alpha},u)=\Lambda\Leftrightarrow\exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}(\Phi)^*(\Theta_\Phi(\overline{\alpha},u),\overline{\alpha},u)=\Lambda$,

2. $\mathbf{Word}_{\mathbb{A}}\models\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Phi(\overline{\alpha},u)=\Lambda\Leftrightarrow\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}(\Phi)^*(\Theta_\Phi(\overline{\alpha},u),\overline{\alpha},u)=\Lambda$,

$\forall\beta$:

3. $\mathbf{Word}_{\mathbb{A}}\models\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Theta_\Phi(\overline{\alpha},u)\subseteq\beta\Rightarrow\{\exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Phi(\overline{\alpha},u)=\Lambda\Leftrightarrow\forall\theta[\beta\subseteq\theta\Rightarrow\exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}(\Phi)^*(\theta,\overline{\alpha},u)=\Lambda]\}$,

4. $\mathbf{Word}_{\mathbb{A}}\models\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Theta_\Phi(\overline{\alpha},u)\subseteq\beta\Rightarrow\{\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}\Phi(\overline{\alpha},u)=\Lambda\Leftrightarrow\forall\theta[\beta\subseteq\theta\Rightarrow\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha})|}(\Phi)^*(\theta,\overline{\alpha},u)=\Lambda]\}$.

Рассмотрим следующую словарную функцию: $\mathrm{Order}(\alpha)$ - такое слово β, что число слов предшествующих слову β в лексикографическом упорядочивании, равно $|\alpha|$. В [6 с. 217] доказано, что эта словарная функция является словарной примитивно рекурсивной функцией, тогда для словарной функции Order существует такой одноместный функтор **Order** алфавита $\mathscr{L}$, что верно:

$\forall\alpha,\beta[\mathrm{Order}(\alpha)=\beta\Leftrightarrow\ \vdash\mathbf{Order}(\alpha)=\beta]$.

Выпишем определяющие равенства для функтора **Order**:

1). $\mathbf{Order}(\Lambda)=\Lambda$;

2). $\mathbf{Order}(\mathbf{S}_i(\alpha))=\mathbf{R}(\mathbf{Order}(\alpha))$, где

a). $\mathbf{R}(\Lambda)=a_1$;

b). $\mathbf{R}(\mathbf{S}_i(\alpha))=\mathbf{S}_{i+1}(\alpha)$, где $1\le i<p$;

$\tilde{c}$). $\mathbf{R}(\mathbf{S}_p(\alpha))=\mathbf{S}_1(\mathbf{R}(\alpha))$.

Замечание. Для каждого множества p - алфавитных слов, будет свой p - алфавитный функтор $\mathbf{Order}_p$. Из контекста будет понятно какой p - алфавитный фунтор имеется ввиду. Функтор **Order** обладает свойством:

1. $\mathbf{WordM}\models\forall\alpha\beta[|\alpha|=|\beta|\supset\mathbf{Order}(\alpha)=\mathbf{Order}(\beta)]$;

2. при $k\ge 2\wedge p\ge 2$ верно $\mathbf{WordM}\models|\mathbf{Order}_p(k)|<k$;

3. Для каждого $p\ge 2$ верно $\mathbf{WordM}\models\mathbf{Order}_p(\dfrac{p^{n+1}-1}{p-1})=\underbrace{1,\ldots,1}_{n+1-\text{раз}}$;

4. Для каждого $p\ge 2$ верно $\mathbf{WordM}\models\forall x[|x|\ge 2\Rightarrow\mathbf{Order}_p(p^{|x|})=\underbrace{(p-1),\ldots,(p-1)}_{|x|-1-\text{раз}}p]$;

5. Согласно определяющим равенствам, которые приведены в [6 с. 217], следует, что этот функтор принадлежит **PPr**, т.е. $\mathbf{Order}\in\mathbf{PPr}$.

Из (3) получим $\mathbf{WordM}\models\mathbf{Order}_p(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{x})|+1}-1}{p-1})=\underbrace{1,\ldots,1}_{|\mathbf{P}(\overline{x})|+1-\text{раз}}$.

Если для аргументных слов α,β верно $\mathbf{WordM}\models\mathbf{Order}(\alpha)=\beta$, то аргументное слово $|\alpha|$ - натуральное число, будем называть гёделевым номером аргументного слова β и обозначать $\ulcorner\beta\urcorner=|\alpha|$.

Очевидно, что для любого аргументного слова β существут такое натуральное число α, что верно $\ulcorner\beta\urcorner=\alpha(\mathbf{WordM}\models\mathbf{Order}(\alpha)=\beta)$, тогда $\mathbf{WordM}\models\ulcorner\underbrace{(p-1),\ldots,(p-1)}_{|x|-1-\text{раз}}p\urcorner=p^{|x|}$, при $|x|\ge 2$.

С каждым $n\ge 1$ - местным функтором Φ свяжем такой функтор, обозначаемый как $\Theta_{\Phi,\forall}$, удовлетворяющий следующим определяющим равенствам:

$\Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x},\Lambda)=\Theta_{\Phi}(\overline{x},\Lambda)$;

$\Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x},\mathbf{S}_k(x_n))=\mathbf{Concat}(\Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x},x_n),\Theta_{\Phi}(\overline{x},\mathbf{Order}(\mathbf{S}_k(x_n))))$.

Верно: 1. Если $\Phi\in\mathbf{PPr}\Rightarrow\Theta_{\Phi,\forall}\in\mathbf{PPr}$;

2. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}}\models\forall\alpha,\beta,\overline{x}[|\alpha|=|\beta|\Rightarrow\Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x},\alpha)=\Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x},\beta)]$;

3. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{x}\forall_y^{|z|}[\Theta_{\Phi}(\overline{x}, y) \subseteq \Theta_{\Phi,\forall}(\overline{x}, \frac{p^{|z|+1}-1}{p-1})]$.

Определим универсальное функциональное слово, обозначаемое как $\Theta_{\mathbb{U}}$.

Определяющие равенства:

$\Theta_{\mathbb{U}}(\Lambda) = \Lambda$,

$\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha a_i) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha), \mathbf{c}(\mathbf{Order}(\alpha), \mathbf{U}(\mathbf{Order}(\alpha))))$. Согласно определения, функтор $\Theta_{\mathbb{U}}$ принадлежит $\mathbf{PPr}$ алфавита $\mathscr{L}(\mathbf{U})$, учитывая $\mathbf{Concat}(u, \mathbf{c}(v, w)) \leftrightharpoons u|v|2vw22$, получим более наглядную запись вида $\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha a_i) = \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha)|\mathbf{Order}(\alpha)|\mathbf{Order}(\alpha)\mathbf{U}(\mathbf{Order}(\alpha))22$.

Имеем:

$(\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \Lambda) = \Lambda$,

$(\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \alpha a_i) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\mathbb{U}})^*(\mathbf{y}, \alpha), \mathbf{c}(\mathbf{Order}(\alpha, \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{Order}(\alpha))))$,

$\forall\alpha\beta\forall\theta \supseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha)\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models [\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \beta \iff (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\theta, \alpha) = \beta]$, в частности

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x\forall y[\Theta_{\mathbb{U}}(x) = y \iff (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\Theta_{\mathbb{U}}(x), x) = y]$.

Замечание. Для каждого $p \geq 2$, определяется своё p - алфавитное универсальное функциональное слово $\Theta_{\mathbb{U}}$.

Утверждение 5.7. Пусть β - такое функциональное слово, что для некоторого слова α верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models (\Theta_{\mathbb{U}})^*(\beta, \alpha) \subseteq \beta \subset \mathbb{A}$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) \subseteq \beta$. Имеем $\forall\overline{x}\forall y\{\mathbf{Fw}(y) \Rightarrow [[(\Theta_{\mathbb{U}})^*(y, \overline{x}) \subseteq y \wedge y \subset \mathbf{U}] \Rightarrow \Theta_{\mathbb{U}}(\overline{x}) \subseteq y]\} \in \mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Верно:

1. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\alpha, \beta[|\alpha| = |\beta| \iff \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \Theta_{\mathbb{U}}(\beta)]$;

2. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\alpha, \beta[|\alpha| \leq |\beta| \iff \Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\beta)]$.

3. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall x\{|x| \leq |y| \Rightarrow [\Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|y|+1}-1}{p-1})](x) = \Lambda \iff x \in \mathbb{A}\}$, где $\mathbb{A}$ - множество $p \geq 2$ - алфавитных аргументных слов;

4. $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\alpha[\Theta_{\mathbb{U}}(\alpha) = \Theta_{\Theta_{\mathbb{U}}}(\alpha)]$, при использовании правила Гудстейна, можно доказать, что $\vdash \Theta_{\mathbb{U}}(x) = \Theta_{\Theta_{\mathbb{U}}}(x)$.

Пусть задан $n+m$ - местный($n \geq 1, m \geq 1$) p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпретационное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$. Для этого функтора существует такой словарный многочлен $\mathbf{P}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$, что для $\forall\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_m$, в простом вычислении функтора Φ на $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$, все опрошенные слова имеют длину, не превосходящую $|\mathbf{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})|$, тогда $\Theta_{\Phi}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\frac{p^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})|+1}-1}{p-1})$.

Далее, пусть $|\gamma_1| \leq |\mathbf{P}_1(\overline{\alpha})|, \ldots, |\gamma_m| \leq |\mathbf{P}_m(\overline{\alpha})|$, тогда в простом вычислении функтора Φ на $\overline{\alpha}, \overline{\gamma}$, все опрошенные слова имеют длину, не превосходящую $|\mathbf{P}(\overline{\alpha}, \mathbf{P}_1(\overline{\alpha}), \ldots, \mathbf{P}_m(\overline{\alpha}))|$, тогда получим

$\Theta_{\Phi}(\overline{\alpha},\overline{\gamma}) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha},\mathbf{P}_1(\overline{\alpha}),\ldots,\mathbf{P}_m(\overline{\alpha}))|+1}-1}{p-1})$.

Далее, рассмотрим формулу вида $\exists_z^{|\mathbf{P}_1(\overline{\alpha})|}[\Phi(\overline{\alpha},z)=\Lambda]$, тогда для любого слова γ, такого, что $|\gamma| \leq |\mathbf{P}_1(\overline{\alpha})|$, верно $\Theta_{\Phi}(\overline{\alpha},\gamma) \subseteq \Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha},\mathbf{P}_1(\overline{\alpha}))|+1}-1}{p-1})$, тогда

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{\exists_z^{|\mathbf{P}_1(\overline{\alpha})|}\Phi(\overline{\alpha},z)=\Lambda \Leftrightarrow \exists_z^{|\mathbf{P}_1(\overline{\alpha})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{\alpha},\mathbf{P}_1(\overline{\alpha}))|+1}-1}{p-1}),\overline{\alpha},z)=\Lambda\}$. Аналогично рассуждая, получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{\exists_{z_2}^{|\mathbf{P}_2(\overline{\beta})|}\exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{\beta})|}\Phi(\overline{\beta},z_1,z_2)=\Lambda \Leftrightarrow \exists_{z_2}^{|\mathbf{P}_2(\overline{\beta})|}\exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{\beta})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{\beta},\mathbf{P}_1(\overline{\beta}),\mathbf{P}_2(\overline{\beta}))|+1}-1}{p-1}),\overline{\beta},z_1,z_2)=\Lambda\}$.

Утверждение 5.8 Пусть $n+m$ - местный($n \geq 1, m \geq 1$). p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпретационное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$ и словарные многочлены $\mathbf{P}_1(\overline{x}),\ldots,\mathbf{P}_m(\overline{x})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\overline{x})$, что

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{\exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|}\ldots\exists_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\overline{x})|}\Phi(\overline{x},z_1,\ldots z_m)=\Lambda \Leftrightarrow \exists_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|},\ldots,\exists_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\overline{x})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{x})|+1}-1}{p-1}),\overline{x},z_1,\ldots,z_m)=\Lambda\}$.

Аналогично.

Утверждение 5.9 Пусть $n+m$ - местный($n \geq 1, m \geq 1$), p - алфавитный функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$, интерпретационное p - алфавитное множество аргументных слов $\mathbb{A}$ и словарные многочлены $\mathbf{P}_1(\overline{x}),\ldots,\mathbf{P}_m(\overline{x})$, тогда можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{P}(\overline{x})$, что

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \{\forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|}\ldots\forall_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\overline{x})|}\Phi(\overline{x},z_1,\ldots z_m)=\Lambda \Leftrightarrow \forall_{z_1}^{|\mathbf{P}_1(\overline{x})|},\ldots,\forall_{z_m}^{|\mathbf{P}_m(\overline{x})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\dfrac{p^{|\mathbf{P}(\overline{x})|+1}-1}{p-1}),\overline{x},z_1,\ldots,z_m)=\Lambda\}$.

Part VI

Сложностные классы и элементарная теория моделей

Множество $\mathbf{B}$ n -ок аргументных слов, при заданной интерпретации оракульного символа $\mathbf{U}$ множеством аргументных слов $\mathbb{A}$, называется полиномиальным, если существует(можно построить) такую бескванторную формулу $\mathcal{B}$, которая построена из функторов, принадлежащих $\mathbf{PPr}$, что верно

$\forall\overline{\alpha}[\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{B}(\overline{\alpha}) \Longleftrightarrow \overline{\alpha} \in \mathbf{B}]$.

Класс всех полиномиальных множеств относительно множества $\mathbb{A}$ - аргументных слов будем обозначать $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$. Этот класс словарных множеств замкнут относительно булевых операций: пересечения, объединения, дополнения и навешивания ограниченного квантора существования и всеобщности($\exists,\forall$) по подсловам.

Множество $\mathbf{B}$ n -ок аргументных слов, называется множеством типа $\sum$, относительно некоторого множества аргументных слов $\mathbb{A}$, если для некоторой $\exists$ ограниченной формулы $\mathcal{B}(\overline{x})$, бескванторная формула которой, построена из функторов принадлежит **PPr**, верно $\forall\overline{\alpha}\{\overline{\alpha} \in \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{B}(\overline{\alpha})\}$.

Класс всех словарных множеств типа $\sum$ будем обозначать посредством $\mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$. Этот класс словарных множеств замкнуты относительно операций: пересечения, объединения и навешивания ограниченного квантора существования по длинам слов.

Пусть $\mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U}) = \{C : \overline{C} \in \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U}\}$. Множество, принадлежащие классу $\mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$ будем называть множеством типа $\prod$[7].

Пусть дана формула вида $\exists_z^{|\mathbf{P}(\overline{x}|}\Phi(\overline{x}, z) = \Lambda$, где функтор Φ - **PPr** - функтор. С помощью функтора **Order** можно построить такой примитивно рекурсивный функтор Ψ, что верно

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{x}[\exists_z^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}\Phi(\overline{x}, z) = \Lambda \equiv \Psi(\overline{x}) = \Lambda]$. Аналогично имеем $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{x}[\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}\Phi(\overline{x}, z) = \Lambda \equiv \Psi(\overline{x}) = \Lambda]$.

Известные соотношения между введенными классами:

a). Существует такой оракул $\mathbb{A}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{A}}(\mathbf{U})$;

b). Существует такой оракул $\mathbb{B}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{B}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{B}}(\mathbf{U})$;

c). Существует такой оракул $\mathbb{C}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{C}}(\mathbf{U})$;

d). Существует такой оракул $\mathbb{D}$, что $\mathcal{NP}_{\mathbb{D}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{D}}(\mathbf{U})$;

e). Существует такой оракул $\mathbb{E}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U}) \bigcap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{E}}(\mathbf{U})$;

f). Существует такой оракул $\mathbb{F}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) \bigcap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{F}}(\mathbf{U})$;

g). Существует такой оракул $\mathbb{G}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) = \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) \bigcap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{G}}(\mathbf{U})$;

h). Существует такой оракул $\mathbb{H}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) \bigcap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{H}}(\mathbf{U})$

i). Существует такой оракул $\mathbb{I}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \neq \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \bigcap \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U})$ и $\mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U}) \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}_{\mathbb{I}}(\mathbf{U})$.

Каждое указанное соотношеие в нерелятивизованном варианте - проблема.

Основные понятия и рассматриваемые теоремы в этом разделе, заимствованы из [8-13] и преобразованы соответствующим образом.

Пусть $\mathscr{F}(\mathbf{U})$ - некоторое множество функторов, содержащее исходные функторы.

Язык первого порядка, определяемый заданным множеством функторов, и обозначаемый как $\mathcal{L}_{\mathscr{F}(\mathbf{U})}$, состоит из функциональных символов f_Φ, для каждого функтора $\Phi \in \mathscr{F}(\mathbf{U})$, местность которого равна местности функтора Φ, константного символа Λ, основного предикатного символа $\leq$.

Замечание. Как правило функциональный символ f_Φ будем обозначать как Φ и интерпретировать его как функцию. Язык $\mathcal{L}_{\mathscr{F}(\mathbf{U})}$ называется k - алфавитным, если множество функторов $\mathscr{F}(\mathbf{U})$ - k - алфавитное.

Если множество функторов $\mathscr{F}(\mathbf{U})$ сосотоит из всего множества словарных примитивно рекурсивных функторов, то язык $\mathcal{L}_{\mathscr{F}(\mathbf{U})}$ будет обозначаться как $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ ($\mathcal{L}$).

Для каждого фиксированного множества $\mathbf{p} \geq 2$ -алфавитных аргументных слов определим следующие теории:

$\mathbf{Th} = \{\mathcal{A} : \mathbf{WordM} \models \mathcal{A}$ - предложение языка $\mathcal{L}\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda)$.

Теория $\mathbf{Th}$ - полная теория в языке $\mathcal{L}$.

Теорию в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, обозначаемую как $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$:

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) = \{\mathcal{A}$: Для любого множества $\mathbf{p} \geq 2 -$ алфавитных аргументных слов $\mathbb{A}$ $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ - предложение языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda)$.

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) = \{\mathcal{A} : \mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ - предложение языка $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}\} + \forall xy(x \leq y \equiv |x| \dot{-} |y| = \Lambda)$

Теория $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ - полная теория в языке $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$.

Имеет место: $\mathbf{Th} \subset \mathbf{Th}(\mathbf{U}) \subset \mathbf{Th}(\mathbb{A})$.

Теорема 6.1. Пусть $\mathfrak{A}' \models \mathbf{Th}$. Пусть $\mathbf{u} : A' \to \{\Lambda, 1\}$, тогда модель $\mathfrak{A}'$ языка $\mathcal{L}$ можно обогатить до такой модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, что $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})$, $\forall b \in A'$ $\mathbf{u}(b) = \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(b)$ и для любой формулы $\mathscr{A}(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}$, $\forall \overline{a} \in A'$, если $\mathfrak{A}' \models \mathscr{A}(\overline{a})$, тогда $\mathfrak{A} \models \mathscr{A}(\overline{a})$.

Доказательство. Составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'})$ (см.[9, стр. 130]). Проинтерпретируем оракульную функцию $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}(a) = \begin{cases} \Lambda, & if\ \mathbf{u}(a) = \Lambda; \\ \mathbf{S}_1(\Lambda), & if\ \mathbf{u}(a) = 1. \end{cases} \text{ для каждого элемента } a \in A' \ (\mathbf{S}_1(\Lambda) \rightleftharpoons a_1 \rightleftharpoons 1)$$

Далее составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'}) + \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \{\mathbf{U}(\mathbf{c}_a) = b : a \in A'\}$. Эта теория либо непротиворечива или таковой не является. Пусть теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'}) + \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \{\mathbf{U}(\mathbf{c}_a) = b : a \in A'\}$ - противоречива, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \bigwedge\limits_{i \leq k} \mathbf{U}(\mathbf{c}_{a_i}) = b_i \supset \neg \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\mathbf{c}_{a_1}, \ldots, \mathbf{c}_{a_k})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \bigwedge\limits_{i \leq k} \mathbf{U}(y_i) = b_i \supset \neg \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(y_1, \ldots, y_k)$.

Имеем: теория $\mathbf{Th}$ - полная теория в языке $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}' \models \mathbf{Th}$, и $\mathfrak{A}' \models \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(a_1, \ldots, a_k)$, тогда существуют такие различные аргументные слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\mathbf{WordM} \models \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \bigwedge\limits_{i \leq k} \mathbf{U}(\alpha_i) = b_i \supset \neg \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Проинтепретируем оракул $\mathbf{U}$: $\mathbf{U}(\alpha_i) = b_i$, для других аргументных слов β положим $\mathbf{U}(\beta) = \Lambda$. Обозначим полученную интепретация как $\mathbb{A}$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \bigwedge\limits_{i \leq k} \mathbf{U}(\alpha_i) = b_i$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \neg \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Формула $\bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ есть формула языка $\mathcal{L}$, тогда $\mathbf{WordM} \models \neg \bigwedge\limits_{j \leq m} \mathscr{B}_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ - противоречие.

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_{A'}) + \mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \{\mathbf{U}(a) = b : a \in A'\}$, тогда $\forall b \in A'$ $\mathbf{u}(b) = \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(b)$ и для любой формулы $\mathscr{A}(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}$, для $\forall \overline{a} \in A'$, если $\mathfrak{A}' \models \mathscr{A}(\overline{a})$, тогда $\mathfrak{A} \models \mathscr{A}(\overline{a})$.

Введём следующее важное понятие.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ - модель языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ и $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$. Полиномиальной срезкой, определяемой набором элементов $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, называется такая модель(алгебраическая система), обозначаемая как $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, носителем которой является множество $A_{\overline{\boldsymbol{a}}} = \{b :$ для некоторого словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{x})$ $\mathfrak{A} \models |b| \leq |\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{a}})|\}$, а сигнатура состоит из всех тех функций f_Φ, для которых функтор $\Phi \in \mathbf{PPr}$.

Имеет место: 1. $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{A}$ [9 c.36].

2. $\forall \overline{\boldsymbol{a}}$ $[\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \mathcal{A}(\overline{\boldsymbol{a}}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \mathcal{A}(\overline{\boldsymbol{a}})]$, где $\mathcal{A}(\overline{x})$ - ограниченная формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$.

Посредством $\Delta_{\mathfrak{A}}$ - будем обозначать диаграмму модели $\mathfrak{A}$[9. с. 86], в частности $\Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}}$ - диаграмма полиномиальной срезки $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{A}'$ - обеднение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ до языка $\mathcal{L}$. имеет место $\Delta_{\mathfrak{A}'} \subseteq \Delta_{\mathfrak{A}}$, в частности $\Delta_{\mathfrak{A}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}} \subseteq \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}}$, учитывая следствие 5.2, стр. 27, по диаграмме $\Delta_{\mathfrak{A}'}$, можно восстановить диаграмму $\Delta_{\mathfrak{A}}$, при этом нобходимо знать график оракула $\mathbf{U}$, в модели $\mathfrak{A}$. Диаграмма $\Delta_{\mathfrak{A}'}$ содержит только следы оракульных вычислений, полная информация об оракульных вычислених содержится в диаграмме $\Delta_{\mathfrak{A}}$, например, если $\mathfrak{A} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c$, тогда $\mathfrak{A}' \models (\Theta_\Phi)^*(c.\bar{b}) = c$, если $[\Theta_\Phi(\bar{b}) = c] \in \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}}$, тогда $[(\Theta_\Phi)^*(c.\bar{b}) = c] \in \Delta_{\mathfrak{A}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}}$.

Утверждение 6.2. Для произвольного $n+1(n \geq 1)$ - местного функтора Φ, для произвольной модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, такой, что $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для произвольного набора $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathfrak{A}$, для произвольного словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{x})$, существует наименьший по длине функциональный элемент $\mathbf{b}$, такой, что $\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{a}})|} \Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{a}}, u) \subseteq \mathbf{b}$.

Примечание. Такой функциональный элемент не единственный, но для любых таких функциональных элементов $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ верно $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \wedge dom(\mathbf{b}) = dom(\mathbf{c}) \wedge \forall x[x \in dom(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{b}(x) = \mathbf{c}(x)]$.

Утверждение 6.3. Для произвольного $n{+}1$ - местного функтора Φ, для произвольной модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, такой, что $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для произвольного набора $\overline{\boldsymbol{a}} \in \mathfrak{A}$, для произвольного словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{x})$, $\forall \overline{\mathbf{b}} \in A_{\overline{\mathbf{a}}}$, для произвольного функционального элемента $\mathbf{c}$, такого, что $\forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|} \Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, u) \subseteq \mathbf{c}$, верно:

1. $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|} \Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|} (\Phi)^*(\mathbf{c}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$.

2. $\mathfrak{A} \models \exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|} \Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|} (\Phi)^*(\mathbf{c}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$.

Утверждение 6.4. Любое расширение полиномиальнй срезки $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, порождает следующие соотношения, для любого функтора $\Phi \in \mathbf{PPr}$ и любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\overline{x})$:

1. $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$;

2. $\forall \overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ верно $\Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}})_{\mathfrak{A}} = \Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}})_{\mathfrak{M}}$;

3. $\forall \overline{\boldsymbol{b}}, c \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, если $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(\Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}), \overline{\boldsymbol{b}}) = c$, тогда $\forall \boldsymbol{f} \in M$, такого что $\Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}) \subseteq \boldsymbol{f}$, верно $\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(\boldsymbol{f}, \overline{\boldsymbol{b}}) = c$ - "Принцим использования" ("**Use Principle**") при расширении моделей;

4. Пусть $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$. Пусть $\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}$ - наименьший по длине функциональный элемент, такой, что

$\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, u) \subseteq \boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}$.

Пусть $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}$ - наименьший по длине функциональный элемент, такой, что $\mathfrak{M} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Theta_\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, u) \subseteq \boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}$. Тогда:

$\boldsymbol{a}$). $dom(\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}) \subset A_{\overline{\boldsymbol{a}}} \wedge dom(\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}) \subset M_{\overline{\boldsymbol{a}}} \wedge \boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}} \subseteq \boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}$;

$\boldsymbol{b}$). Если $|e| \leq |\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|$ и $\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, e) = h$, тогда $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}, \overline{\boldsymbol{b}}, e) = h$ и $\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}, \overline{\boldsymbol{b}}, e) = h$;

$\boldsymbol{c}$). Если $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$, тогда для каждого $|f| \leq |\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|$ получим $\mathfrak{A} \models (\Phi)^*(\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}, \overline{\boldsymbol{b}}, f) = \Lambda$, тогда $\mathfrak{M} \models (\Phi)^*(\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}, \overline{\boldsymbol{b}}, f) = \Lambda$, тогда $\mathfrak{M} \models \forall u(|u| \leq |\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})| \wedge u \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}} \supset (\Phi)^*(\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$. Имеет место также, если $\mathfrak{M} \models \forall u(|u| \leq |\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})| \wedge u \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}} \supset (\Phi)^*(\boldsymbol{d}_{\mathfrak{M}}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda)$, тогда $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\boldsymbol{c}_{\mathfrak{A}}, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$.

"Принцим использования"("**Use Principle**") при расширении моделей.

Теорема 6.5. Пусть $\mathbb{A}$ - произвольный оракул. $\mathcal{NP}(\mathbb{A}) = \mathbf{co} - \mathcal{NP}(\mathbb{A})$, тогда и только тогда, когда для любой ограниченной $\exists$ формулы $\mathcal{A}(x)$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, существует ограниченная $\forall$ формула $\mathcal{B}(x)$ той же сигнатуры, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall x[\mathcal{A}(x) \equiv \mathcal{B}(x)]$.

Теорема 6.6. Пусть $\mathbb{A}$ - произвольный оракул, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ - ограниченная $\forall$ формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Следующие условия равносильны:

1. Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, для любых $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, для любых $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, любой модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такой, что $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{M}$, если $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{M} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

2. Для формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ существует такая ограниченная $\exists$ формула $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\overline{x})$ языка языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}$, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall\overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{B}}(\overline{x})]$.

Доказательство. Докажем, что из (1) следует (2). Идея доказательства заимствована в [8 с. 156], [9 с.133-134]. Если формула $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ такова, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall\overline{x}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall(\overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{B}}(\overline{x})]$, где $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\overline{x})$ - ограниченная $\exists$ формула, сигнатуры $\mathbf{PPr}$ такая, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall\overline{x}\boldsymbol{\mathcal{B}}(\overline{x})$.

Пусть формула $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ такова, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \not\models \forall\overline{x}\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})(a)$.

Составим множество предложений $\boldsymbol{\Gamma}(\overline{c}) = \{\Theta(\overline{c}) : \ \mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \supset \Theta(\overline{x})\}$, где $\Theta(\overline{x})$ - ограниченная $\forall$ формула, сигнатуры $\mathbf{PPr}$. Из (a) получим, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \boldsymbol{\Gamma}(\overline{c})$ - совместно. Докажем $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \boldsymbol{\Gamma}(\overline{c}) \models \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$. Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \boldsymbol{\Gamma}(\overline{c})$, $\overline{c} \in A$. Составим $\Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}}$ - диаграмма модели $\mathfrak{A}_{\overline{c}}$.

Множество предложений $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}} + \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$ - совместно или таковым не является. Если $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}} + \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$ - несовместно, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \bigwedge\limits_{i \leq k} \Lambda_i(\overline{c}, \overline{d}) \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, где $\Lambda_i(\overline{c}, \overline{d}) \in \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}}$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c}) \models \neg\bigwedge\limits_{i \leq k} \Lambda_i(\overline{c}, \overline{d})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c}) \supset \neg\bigwedge\limits_{i \leq k} \Lambda_i(\overline{c}, \overline{d})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall\overline{x}\forall\overline{y}[\neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \supset \neg\bigwedge\limits_{i \leq k} \Lambda_i(\overline{x}, \overline{y})]$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall\overline{x}[\neg\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \supset \forall\overline{y}\neg\bigwedge\limits_{i \leq k} \Lambda_i(\overline{x}, \overline{y})](b)$.

Для $\overline{d}$, существет такой словарный многочлен $\tilde{\mathbf{P}}(\overline{x})$, что $|\overline{d}| \leq |\tilde{\mathbf{P}}(\overline{c})|$. Из ($b$) получим

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \overline{x}[\neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \supset \forall_{\overline{y}}^{|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{x})|} \neg \bigwedge_{i \le k} \Lambda_i(\overline{x}, \overline{y})]$, тогда $\forall_{\overline{y}}^{|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{c})|} \neg \bigwedge_{i \le k} \Lambda_i(\overline{c}, \overline{y}) \in \mathbf{\Gamma}(\overline{c})$, тогда $\mathfrak{A} \models \neg \bigwedge_{i \le k} \Lambda_i(\overline{c}, \overline{d})$ - противоречие, следовательно множество предложений $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}} + \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$ - совместно.

Пусть $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{c}}} + \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, тогда получим $\mathfrak{A}_{\overline{c}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, тогда $\mathfrak{A} \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, следовательно $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \mathbf{\Gamma}(\overline{c}) \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \bigwedge_{j \le m} \Omega_j(\overline{c}) \supset \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{c})$, где $\Omega_j(\overline{c}) \in \mathbf{\Gamma}(\overline{c})$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \bigwedge_{j \le m} \Omega_j(\overline{x}) \supset \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$.

Имеем $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \supset \bigwedge_{j \le m} \Omega_j(\overline{x})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \bigwedge_{j \le m} \Omega_j(\overline{x})$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \neg \bigwedge_{j \le m} \Omega_j(\overline{x}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$.

Докажем, что из (2) следует (1). Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такая, что $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

Имеем: для формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ существует такая ограниченная $\exists$ формула $\mathfrak{B}(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}$, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \models \forall \overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{x})]$, учитывая, $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ и $\mathfrak{M} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, получим $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{x})]$ и $\mathfrak{M} \models \forall \overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{x})]$ тогда $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$ и $\mathfrak{M} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$ и $\mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}}) \equiv \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$, учитывая $\mathfrak{A} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, получим $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$, учитвая, что $\mathfrak{B}(\overline{x})$ - ограниченная $\exists$ формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$, $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\overline{\boldsymbol{b}} \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, получим $\mathfrak{M} \models \mathfrak{B}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{M} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

Замечание. Аналогично теореме 6.6, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ для теории $\mathbf{Th}$ в языке $\mathcal{L}$.

Замечание. Аналогично теореме 6.6, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ для теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Теорема 6.7. Для любого оракула $\mathbb{A}$, любой ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$, следующие условия равносильны:

1). Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, любых элементов $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, любых элементов $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, если $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда для любой модели $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ такой, что $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, верно $\mathfrak{B} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

2). Для любой модели $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, любых элементов $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, любых элементов $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, если $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} \vdash \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

3). Для формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ существует ограниченная $\exists$ формула $\mathcal{B}(\overline{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$, что

$\mathbf{Th}(\mathbb{A}) \vdash \forall \overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \mathcal{B}(\overline{x})]$(равносильно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}[\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x}) \equiv \mathcal{B}(\overline{x})]$).

Доказательство. Доказательство (1) $\Leftrightarrow$ (3) - см. теорему 6.6. Докажем, что из (1) следует (2).

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ и $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$. Предположим, что $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} \nvdash \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда теория $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} + \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$ - непротиворечива. Пусть $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} + \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, $\mathfrak{B} \models \neg \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$ и $\mathfrak{B} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$ - противоречие, следовательно $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} \vdash \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

Докажем, что из (2) следует (1).

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ и $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$.

Из $\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$, получим $\mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}} \vdash \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$. Из $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A})$ и $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ получим $\mathfrak{B} \models \mathbf{Th}(\mathbb{A}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}}$, тогда $\mathfrak{B} \models \boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{\boldsymbol{b}})$.

Замечание. Аналогично теореме 6.7, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ для теории $\mathbf{Th}$ в языке $\mathcal{L}$.

Замечание. Аналогично теореме 6.7, доказывается теорема для ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\overline{x})$ в языке $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ для теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$.

Замечание. Используя утверждение 6.3 и теорему 6.7, можно достаточно просто доказать теорему 4.5[12 p.469].

Теорема 6.8 Пусть для теории $\mathbf{Th}$ выполняется второй пункт теоремы 6.7 в языке $\mathcal{L}$, для любой ограниченной $\forall$ формулы сигнатуры $\mathbf{PPr}$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})$, $\overline{\boldsymbol{a}} \in A$, $\overline{\boldsymbol{b}} \in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$.

Пусть для формулы $\forall_y^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}\Phi(\overline{x}, y) = \Lambda$ верно $\mathfrak{A} \models \forall_y^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, y) = \Lambda$, где Φ - функтор сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}} \vdash \forall_y^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, y) = \Lambda$.

Доказательство. Формула $\forall\overline{x}[\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}\Phi(\overline{x}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}(\Phi)^*(\boldsymbol{\Theta}_{\mathbb{U}}(\mathbf{exp_p}(|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{x}))|), \overline{x}, u)) = \Lambda]$, принадлежит теории $\mathbf{Th}(\mathbf{U})$, где $\tilde{\mathbf{P}}(\overline{x})$ - подходящий словарный многочлен(см. Утверждение 5.9), тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall\overline{x}[\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}\Phi(\overline{x}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{x})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\mathbf{exp_p}(|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{x})|)), \overline{x}, u) = \Lambda]$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash [\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, z) = \Lambda \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\mathbf{exp_p}(|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{\boldsymbol{b}})|)), \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda](a)$ Вычислим: $|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{\boldsymbol{b}})| = \boldsymbol{d}_1$, $\mathbf{exp_p}(\boldsymbol{d}_1) = \boldsymbol{d}_2$, $\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2) = \boldsymbol{d}_3$, тогда $\mathfrak{A}' \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\boldsymbol{d}_3, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$, где $\mathfrak{A}'$ - обеднение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ до модели языка $\mathcal{L}$, тогда $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}'_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}} \vdash \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\boldsymbol{d}_3, \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$, учитывая равенство

$\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2) = \boldsymbol{d}_3$, получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}'_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2} + \{\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2) = \boldsymbol{d}_3\}} \vdash \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2), \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$, учитывая

$(\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2) = \boldsymbol{d}_3) \in \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}}$, получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}} \vdash \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\boldsymbol{d}_2), \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$. Учитывая

$\mathbf{Th} \vdash \forall x \forall y[\mathbf{exp_p}(x) = y \equiv \mathbf{EXP_p}(x, y) = \Lambda]$ и $\mathbf{Th} \vdash \forall\overline{z}\forall v\forall x[\mathscr{A}(\overline{z}, v) \wedge \mathbf{EXP_p}(x, v) = \Lambda \supset \mathscr{A}(\overline{z}, \mathbf{exp_p}(x))]$, получим $\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}} \vdash \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\mathbf{exp_p}(\boldsymbol{d}_1)), \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda$, учитывая $|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{\boldsymbol{b}})| = \boldsymbol{d}_1$, получим

$\mathbf{Th} + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}} \vdash \forall_u^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}(\Phi)^*(\Theta_{\mathbb{U}}(\mathbf{exp_p}(|\tilde{\mathbf{P}}(\overline{\boldsymbol{b}})|)), \overline{\boldsymbol{b}}, u) = \Lambda]$, учитывая$(a)$, получим

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}_{\overline{a};\boldsymbol{d}_2}} \vdash \forall_y^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, y) = \Lambda$, тогда $\mathbf{Th}(\mathbf{U}) + \Delta_{\mathfrak{A}} \vdash \forall_y^{|\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\overline{\boldsymbol{b}}, y) = \Lambda$.

Замечание. Эту теорему можно распространить на любую огрниченную $\forall$ формулу сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$.

Теорема 6.9. Если для теории $\mathbf{Th}$ для любой ограниченой $\forall$ - формулы языка $\mathcal{L}$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ выполняется первый пункт теоремы 6.7, тогда для любого оракула $\mathbb{A}$, для любой ограниченой $\forall$ - формулы языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$, для теории $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ также выполняется первый пункт этой теоремы.

Доказательство. Пусть Φ - произвольный $n+1$ - местный функтор, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$. Пусть $\mathbf{P}(x_1,\dots,x_n)$ - произвольный словарный многочлен. Докажем теорему для формулы вида $\forall_z^{|\mathbf{P}(x_1,\dots,x_n)|}\Phi(x_1,\dots,x_n,z)=\Lambda$.

Пусть $\mathfrak{A}\models\mathbf{Th}(\mathbb{A})$, $\overline{\boldsymbol{a}}\in A$, $\overline{\boldsymbol{b}}\in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, $\mathfrak{A}\models\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{b})|}[\Phi(\overline{\boldsymbol{b}},z)=\Lambda]$, докажем, что $\forall\ \mathfrak{M}\models\mathbf{Th}(\mathbb{A})$, такой, что $\mathfrak{M}\supseteq\mathfrak{A}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, верно $\mathfrak{M}\models\forall_z^{|\mathbf{P}(\overline{b})|}[\Phi(\overline{\boldsymbol{b}},z)=\Lambda]$.

Пусть $\mathfrak{A}'$ - обеднение модели $\mathfrak{A}$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ до модели языка $\mathcal{L}$.

Составим теорию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)$ [8] (см.[9, стр. 130]), далее составим терию $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)+\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$, где $\mathfrak{M}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ - обеднение модели $\mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ до языка $\mathcal{L}$. Эта теория противоречива или таковой не является. Предположим, что теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)+\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$ - противоречива, тогда $\mathbf{Th}\vdash\bigwedge A_i(\overline{e},\overline{f})\supset\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{h})$, где $\overline{e}\in A_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, $A_i(\overline{e},\overline{f})\in\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)$, $B_j(\overline{e},\overline{h})\in\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$, тогда $\mathbf{Th}\vdash\bigwedge A_i(\overline{e},\overline{f})\supset\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{x})$, тогда $\mathbf{Th}\vdash\bigwedge A_i(\overline{e},\overline{f})\supset\forall\overline{x}\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{x})$, тогда $\mathfrak{A}'\models\forall\overline{x}\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{x})$. Для $\overline{h}$ можно построить такой словарный многочлен $\mathbf{Q}(\overline{x})$, что $\mathfrak{A}'\models|\overline{h}|\le|\mathbf{Q}(\overline{\boldsymbol{a}})|$, тогда $\mathfrak{A}'\models\forall_{\overline{x}}^{|\mathbf{Q}(\overline{a})|}\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{x})$, тогда, согласно пункта 1 теоремы 6.7 для языка $\mathcal{L}$, учитывая $\mathfrak{A}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}\subseteq\mathfrak{M}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}$, получим $\mathfrak{M}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}\models\forall_{\overline{x}}^{|\mathbf{Q}(\overline{a})|}\neg\bigwedge B_j(\overline{e},\overline{x})$ - противоречие, следовательно теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)+\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$ - непротиворечива. Отметим, что в моделях $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{M}'$ имеются следы оракульных вычислений оракула $\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}$ и оракула $\mathbf{U}_{\mathfrak{M}}$. Пусть $\mathfrak{N}\models\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)+\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$ в языке $\mathcal{L}$. Имеем: $\mathfrak{A}'\subseteq\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}\subseteq\mathfrak{N}$

Построим интерпретацию оракульного символа $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}(a)=\begin{cases}\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(a), & if\ a\in A;\\[2ex] \mathbf{U}_{\mathfrak{M}}(a), & if\ a\in M_{\overline{\boldsymbol{a}}};\\[2ex] \Lambda, & other.\end{cases}$$

Обозначим полученную интерпретацию как $\mathbb{B}$. Согласно теореме 6.1, получим $\mathfrak{N}_1\models\mathbf{Th}(\mathbf{U})+\mathbf{Th}(\mathfrak{A}'_A)+\Delta_{\mathfrak{M}'_{\overline{a}}}$.

Имеем:

1. $\mathfrak{A}'\subseteq{\mathfrak{N}_1}'$, $\mathfrak{M}'_{\overline{\boldsymbol{a}}}\subseteq{\mathfrak{N}_1}'$.

2. Для интепретации $\mathbb{A}_{\mathfrak{A}}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{A}$ и для интепретации $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{N}_1$ верно $\mathbb{A}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ $(\forall b\in A\ \mathbf{U}_{\mathfrak{A}}(b)=\mathbf{U}_{\mathfrak{N}_1}(b))$.

3. Для интепретации $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}_{\overline{a}}}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}}$ и для интепретации $\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ оракульного символа $\mathbf{U}$ в модели $\mathfrak{N}_1$ верно $\mathbb{A}_{\mathfrak{M}_{\overline{a}}}\subseteq\mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$ $(\forall b\in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \mathbf{U}_{\mathfrak{M}_{\overline{a}}}(b)=\mathbf{U}_{\mathfrak{N}_1}(b))$.

4. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}$ верно $\forall\overline{b}\in A\ \forall c\in A\ \mathfrak{A}\models\Phi(\overline{b})=c\Longleftrightarrow\mathfrak{N}_1\models\Phi(\overline{b})=c$, при этом используется (1), тогда верно $\forall\overline{b}\in A\ \forall c\in A\ \forall d\in A\ \mathfrak{A}\models(\Theta_\Phi)^*(c,\overline{b})=d\Longleftrightarrow\mathfrak{N}_1\models\Theta^*_\Phi(c,\overline{b})=d$.

5. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ верно $\forall\overline{b}\in A\ \forall c\in A\ \mathfrak{A}\models\Theta_\Phi(\overline{b})=c\Longleftrightarrow\mathfrak{N}_1\models\Theta_\Phi(\overline{b})=c$, при

[8] Можно взять теорию $\mathbf{Th}+\Delta_{\mathfrak{A}'}$

этом используется (2,4), теорема 4.3, теорема 4.4, теорема 5.1 и теорема 5.5:

$\mathfrak{A} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c_\mathfrak{A} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models (\Theta_\Phi)^*(c_\mathfrak{A}.\bar{b}) = c_\mathfrak{A} \wedge c_\mathfrak{A} \subset \mathbb{A}_\mathfrak{A}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models (\Theta_\Phi)^*(c_\mathfrak{A}.\bar{b}) = c_\mathfrak{A} \wedge c_\mathfrak{A} \subset \mathbb{B}_{\mathfrak{N}_1}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1} \subset c_\mathfrak{A}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models (\Theta_\Phi)^*(c_\mathfrak{A}.\bar{b}) = \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = d_{\mathfrak{N}_1} = c_\mathfrak{A}$

6. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ верно $\forall \bar{b} \in A\ \forall c \in A\ \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{b}) = c \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) =$ c, при этом используется (4,5) и теорема 5.1. Таким образом получим $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}_1$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \Delta_\mathfrak{A}$, тогда $\mathfrak{N}_1 \models \mathbf{Th}(\mathbf{U})+\Delta_\mathfrak{A}$, учитывая теорему 6.8, получим $\mathfrak{N}_1 \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}[\Phi(\bar{\boldsymbol{b}}, z) = \Lambda]$.

7. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}$ сигнатуры $\mathbf{PPr}$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \forall c \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \Phi(\bar{b}) = c \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) = c$, при этом исапользуется (1), тогда верно

$\forall \bar{b} \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \forall c \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \forall d \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \ \mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models (\Theta_\Phi)^*(c, \bar{b}) = d \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_1 \models \Theta^*_\Phi(c.\bar{b}) = d$

8. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \forall c \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \ \mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_1 \models \Theta_\Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (3,7), теорема 4.3, теорема 4.4, теорема 5.1 и теорема 5.5.

9. Для любого функтора Φ языка $\mathcal{L}(\mathbf{U})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}(\mathbf{U})$ верно

$\forall \bar{b} \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \forall c \in M_{\overline{\boldsymbol{a}}}\ \ \mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \Phi(\bar{b}) = c \Longleftrightarrow \mathfrak{N}_1 \models \Phi(\bar{b}) = c$, при этом используется (7,8) и теорема 5.1. Таким образом получим $\mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \subseteq \mathfrak{N}_1$, учитывая (6), получим $\mathfrak{M}_{\overline{\boldsymbol{a}}} \models \forall_y^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}\Phi(\bar{\boldsymbol{b}}, y) = \Lambda$, тогда

$\mathfrak{M} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}[\Phi(\bar{\boldsymbol{b}}, z) = \Lambda]$.

Продолжаем. Пусть $\mathcal{A}(z, x_1, \ldots, x_n)$ - произвольная бескванторная формула сигнатуры $\mathbf{PPr}$. Для этой формулы можно построить такой $n+1$ - местный функтор $\Phi_\mathcal{A}$(теорема 1.6), что

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x}, \forall z[\mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \Phi_\mathcal{A}(z, \bar{x}) = \Lambda]$, тогда для любого словарного многочлена $\mathbf{P}(\bar{x})$ верно

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x}[\exists_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|}\mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \exists_u^{|\mathbf{P}(\bar{x})|}[\Phi_\mathcal{A}(u, \bar{x}) = \Lambda]]$, а также

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall \bar{x}[\forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{x})|}\mathcal{A}(z, \bar{x}) \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{x})|}[\Phi_\mathcal{A}(u, \bar{x}) = \Lambda]]$, тогда

$\mathbf{Th}(\mathbf{U}) \vdash \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}\mathcal{A}(z, \bar{\boldsymbol{b}}) \equiv \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}[\Phi_\mathcal{A}(u, \bar{\boldsymbol{b}}) = \Lambda]$.

Пусть $\mathfrak{A} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}\mathcal{A}(z, \bar{\boldsymbol{b}})$, тогда $\mathfrak{A} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}[\Phi_\mathcal{A}(u, \bar{\boldsymbol{b}}) = \Lambda]$, тогда $\mathfrak{M} \models \forall_u^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}[\Phi_\mathcal{A}(u, \bar{\boldsymbol{b}}) = \Lambda]$, тогда

$\mathfrak{M} \models \forall_z^{|\mathbf{P}(\bar{\boldsymbol{b}})|}\mathcal{A}(z, \bar{\boldsymbol{b}}) = \Lambda$.

Для формулы, которая имеет два и более ограниченных кванторов $\forall$, доказательство проводится аналогично. **Конец доказательства теоремы**.

Теорема 6.10. Существует такая интерпретация $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, что $\mathcal{NP}(\mathbb{A}) \neq \mathbf{co}-\mathcal{NP}(\mathbb{A})$, тогда для теории $\mathbf{Th}(\mathbb{A})$ не выполняется третий пункт теоремы 6.7.

Доказательство. Рассмотрим формулу вида $\exists_y^{|x|}[|x| = |y| \wedge \mathbf{U}(y) = \Lambda]$. Для этой формулы можно построить такую n - алфавитную интерпретацию $\mathbb{A}$ функтора $\mathbf{U}$, что при $n \geq 2$, для любой ограниченной $\forall$ формулы $\boldsymbol{\mathcal{A}}(x, \bar{z})$, сигнатуры $\mathbf{PPr}$, верно $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \not\models \exists \bar{z} \forall x[\exists_y^{|x|}[|x| = |y| \wedge \mathbf{U}(y) = \Lambda] \equiv \boldsymbol{\mathcal{A}}(x, \bar{z})]$.

Конструкция построения оракула $\mathbb{A}$ имеется в[13, p. 437].

Замечание. Для исчисления $\mathbf{CalcEq_U}$ построить оракул $\mathbb{A}$, весьма просто.

Следствие. $\mathcal{NP} \neq \mathbf{co} - \mathcal{NP}$.

Доказательство. Используем теоремы 6.5 - 6.10.

P.S. Я располагаю доказательством следующего соотношения классов сложности

$\mathcal{P} = ?(\mathcal{NP} \bigcap \mathbf{co}{-}\mathcal{NP})$, подход решения к которому, даже не обозначен в разделе "Дискретная математика".

The latest version of the presented study can be seen on the page **https://logicproof.org**

Пусть $\mathbf{PF}_n$ - класс функций, которые вычислимы на детерминированных машинах Тьюринга с входным алфавитом $\{a_1 \ldots, a_n\}(n \geq 2)$ за время полиномиально зависящее от длины входа. Имеем $\mathbf{PF}_n = \mathbf{PPr}$, где $\mathbf{PPr}$ - n - алфавитные функторы.

Пусть $\mathbb{N} = \{\Lambda\} \bigcup \{m : \underbrace{\mathbf{S}_1(\mathbf{S}_1(, \ldots, (\mathbf{S}_1}_{m-\text{ раз}}(\Lambda), \ldots,), m \geq 1\}$.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, где $n \geq 2$.

Всякая функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, порождает словарную функцию $f_w : (A^*)^k \to A^*$ по правилу

$f_w(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \ulcorner f(\ulcorner \alpha_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \alpha_k \urcorner) \urcorner^{-1}$.

Всякая словарная функция $f_w : (A^*)^k \to A^*$ порождает функцию $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, по правилу

$f(m_1, \ldots, m_k) = \ulcorner f_w(\ulcorner m_1 \urcorner^{-1}, \ldots, \ulcorner m_k \urcorner^{-1}) \urcorner$.

Пусть $\mathscr{P}_p$ - наименьший класс функций, содержащий функции: $\mathbf{S}_1(x)$, $x + y$, $x \dot{-} y$, $[x/2]$, $[\sqrt{x}\ ]$, x^2, $x^{|y|}$ и замкнутый относительно операции суперпозиции и ограниченной рекурсии вида

$f(\overline{x}, \Lambda) = g(\overline{x})$,

$f(\overline{x}, p \cdot y + i) = h_i(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y))$, где $p \geq 2$, $0 \leq i < p$

$\forall \overline{x}, y[f(\overline{x}, y) \leq j(\overline{x}, y)]$.

Теорема(A. Cobham[6]). $\mathscr{P}_p = \mathbf{PF}_p$.

Тогда $\mathscr{P}_p = \mathbf{PPr}$, где $\mathbf{PPr}$ - состоит из p - алфавитных $\mathbf{PPr}$ функторов($p \geq 2$).

Пусть $\mathbf{PF}Space_n$ - класс функций, которые вычислимы на детерминированных машинах Тьюринга с входным алфавитом $\{a_1 \ldots, a_n\}(n \geq 2)$ с полиномиально ограниченной памятью, зависящей от длины входа.

Пусть $\mathscr{P}Space$ - наименьший класс функций, содержащий функции: $\mathbf{S}_1(x)$, $x + y$, $x \dot{-} y$, $[x/2]$, $[\sqrt{x}\ ]$, x^2, $x^{|y|}$ и замкнутый относительно операции суперпозиции и ограниченной рекурсии вида

$f(\overline{x}, \Lambda) = g(\overline{x})$,

$f(\overline{x}, y + 1) = h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y))$,

$\forall \overline{x}, y[f(\overline{x}, y) \leq j(\overline{x}, y)]$.

Имеем $\mathbf{PF}Space_n = \mathscr{P}Space_w$.

Из полученных результатов представленных в данном исследовании, следует $\mathbf{PF}_n \subsetneq \mathbf{PF}Space_n, \forall p \geq 2$ верно $\mathscr{P}_p \subsetneq \mathscr{P}Space$.

Литература

1. F. W. v. Henke, K. Indermark, G. Rose, K. Weihrauch. On Primitive Recursive Wordfunctions. Computing, vol 15, 1975, p. 217-234.

2. Шанин Н.А. Вступительная статья. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р.Л. Гудстейна - В кн.: Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. Издательство М."Наука 1970. с. 7-75.

3. R.L. Goodstein. Recursive number theory. Amstrdam, 1957. p. 187.

4. Карри Х.Б. Формализация рекурсивной арифметики - В кн.: Р.Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. Издательство М."Наука"стр. 437-469.

5. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986. с. 368.

6. A. Cobham The intrinsic computational difficulty of functions. Proc. of the 1964 International Congress for Logic, Methology, and the Philosophy of Sciens, North Holand Publishing Co., Amsterdam, p. 24-30.

7. L, J. Stockmeyer. The polynomial-time hierarchy. Theoretical Computer Science vol 3 1977, p.1-22.

8. Ершов Ю.Л. Палютин Е.А. Математическая логика. М., ФИЗМАТЛИТ, 2011.с. 356.

9. Г. Кейслер, Чэн. Ч.Ч. Теория моделей, Москва, Изд-во МИР, 1977, с. 614.

10. Справочная книга по математической логике, ч. 1. Теория моделей, Москва "Наука 1982, с. 391.

11. J. Donald Monk. Mathematical Logic. Springer - Verlag, New York, 1976.

12. Book R.V., Long T.J., Selman A.L. Quantitative relativization of complexity classes. SIAM J. Comput. vol 13 No 3 August 1984, p. 461-487.

13. Baker T, Gill J. Solovay R. Relativization of the $\mathscr{P} =? \mathscr{N}\mathscr{P}$ Question. SIAM J. Comput. vol 4 December 1971, p. 431-442.

Приложение

Составим $k \geq 3$ местный функтор вида $[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k\mathbf{I}_k^k]\dots]$. Для этого функтора в исчислении **CalcEq** выводимо равенство

$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k\mathbf{I}_k^k]\dots](x_1 \dots x_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{k-1}, x_k)\dots))$.

Пусть $\mathbf{Concat}^k \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k\mathbf{I}_k^k]\dots]$, при $k \geq 3$, тогда $\vdash \mathbf{Concat}^k(x_1, \dots x_k) = \mathbf{Concat}(x_1, \mathbf{Concat}(x_2, \dots \mathbf{Concat}(x_{k-1}, x_k)\dots))$. При $k = 2$, получим $\mathbf{Concat}^2 \rightleftharpoons \mathbf{Concat}, \vdash \mathbf{Concat}^2(x_1, x_2) = \mathbf{Concat}(x_1, x_2)$ при $k = 1$ $\mathbf{Concat}^1 \rightleftharpoons \mathbf{I}_1^1$, $\vdash \mathbf{Concat}^1(x) = x$.

Имеем $([J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k\mathbf{I}_k^k])^* = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^{k+1}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] = [J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]\mathbf{I}_1^{k+1}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] =$
$[J\mathbf{Concat}(\mathbf{I}_{k-1}^k)^*(\mathbf{I}_k^k)^*] = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_k^{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^{k+1}]$, тогда
$(\mathbf{Concat}^k)^* = ([J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_1^k[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^k \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_{k-1}^k\mathbf{I}_k^k]\dots]^* =$
$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^{k+1}[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_3^{k+1} \dots [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_k^{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^{k+1}]\dots]$, тогда

$\vdash (\mathbf{Concat}^k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \mathbf{Concat}^k(x_2, \dots, x_{k+1})$

Имеем $(\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^* = (J[\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}])^*$, тогда
$(J[\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \dots, \Theta_{\Psi_k}])^* = [J(\mathbf{Concat}^{k+1})^*\mathbf{I}_1^{n+1}([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(\Theta_{\Psi_1})^*, \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*]$.

Далее $([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^* = [J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*]$, тогда

$\vdash ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = [J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*](x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, тогда

$\vdash [J(\Theta_\Phi)^*\mathbf{I}_1^{n+1}(\Psi_1)^*, \dots (\Psi_k)^*](x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$,
тогда $\vdash ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$, тогда $\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (\mathbf{Concat}^{k+1})^*(x_1, ([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$
$, (\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда
$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}^{k+1}(([J\Theta_\Phi\Psi_1, \dots \Psi_k])^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$
$(\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда
$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}^{k+1}((\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})),$
$(\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$, тогда
$\vdash (\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{Concat}((\Theta_\Phi)^*(x_1, (\Psi_1)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots (\Psi_k)^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})),$
$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_1})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_{k-1}})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \dots, (\Theta_{\Psi_k})^*(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})), \dots,)$.

Даны Φ - $n \geq 1$ - местный функтор, $\Psi_1, \dots, \Psi_k$ - $(n+2)$ - местные функторы. Составим функтор $[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]$ - $(n+1)$ - местный. По этому функтору построим функтор $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$.

Пусть $\overline{x} \leftrightharpoons x_1, \dots, x_n$, $\lambda \leftrightharpoons [J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]$.

Имеем $\vdash \lambda(\overline{x}, z, u) = [J[R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2}, \dots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}](\overline{x}, z, u) = [R\Phi\Psi_1, \dots, \Psi_k](\overline{x}, z)$.

Пусть $\tilde{\Psi}_i \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]$, $\tilde{\Psi}_i$ - $(n+2)$ - местный фунтор.

Имеем: $\vdash \tilde{\Psi}_i(\overline{x},z,u) \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\overline{x},z,u) =$

$\mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\overline{x},z,u),\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}(\overline{x},z,u)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z,u)),u) =$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x},z)),u)$.

Итак, $\vdash \tilde{\Psi}_i(\overline{x},z,u) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x},z)),u)$

Пусть $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]} \leftrightharpoons [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k]$.

Определяющие равенства:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k](\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k](\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \tilde{\Psi}_i(\overline{x},z,[R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k](\overline{x},z)) =$

$\tilde{\Psi}_i(\overline{x},z,\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z))$.

Итак, имеем следующие определяющие равенства для фунтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$,

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(y)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k](\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z))$, где $i \le k$,

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(y)) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},y)$, где $i > k$.

Далее $(\lambda)^* \leftrightharpoons ([J[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}])^*$.

$([J[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}])^* = [J([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*,\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*]$

Имеем: $\vdash (\lambda)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = [J([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*,\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*](\mathbf{y},\overline{x},z,u) =$

$([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y},\overline{x},z,u),(\mathbf{I}_1^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u),\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u)) = ([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)$

Итак, $\vdash (\lambda)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = ([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)$.

$(\tilde{\Psi}_i)^* \leftrightharpoons ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}])^* = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*] =$

$[J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*]$.

$([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^* = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*,\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\lambda)^*]$,

$\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{I}_1^{n+2})^*,\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\lambda)^*](\mathbf{y},\overline{x},z,u) =$

$(\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y},\overline{x},z,u),(\mathbf{I}_1^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u),\dots,(\mathbf{I}_{n+1}^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u),(\lambda)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u)) =$

$(\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,(\lambda)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u)) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z))$.

Итак, $\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z))$.

$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}])^*](\mathbf{y},\overline{x},z,u) =$

$[J[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3]\mathbf{I}_1^{n+3}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*](\mathbf{y},\overline{x},z,u) =$

$[J\mathbf{Concat}\mathbf{I}_2^3\mathbf{I}_3^3](\mathbf{I}_1^{n+3}(\mathbf{y},\overline{x},z,u),([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u),(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u)) =$

$\mathbf{Concat}(([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda])^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u),(\mathbf{I}_{n+2}^{n+2})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),u)$.

Итак, $\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,u) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),u)$.

$(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^* \leftrightharpoons ([R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^* = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*]$

$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\Lambda) = ([R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},\Lambda) = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y},\overline{x},\Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\mathbf{y},\overline{x})$

$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = ([R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = [R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) =$

$(\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,[R(\Theta_\Phi)^*(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*](\mathbf{y},\overline{x},z)) = (\tilde{\Psi}_i)^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k)])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)) =$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),([R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k)])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)) =$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},z))$.

Итак, $\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},z))$.

Таким образом получим:

$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\Lambda) = (\Theta_\Phi)^*(\mathbf{y},\overline{x})$,

$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{y},\overline{x},z,([R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k])^*(\mathbf{y},\overline{x},z)),(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},z))$,

при $i \leq k$.

$\vdash (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = (\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^*(\mathbf{y},\overline{x},z)$, при $i > k$.

Пусть $\Psi_1,\ldots\Psi_k$ - 2 - местные фунторы, α - некотрое $p-$ алфавитное аргументное слово. Составим функтор $[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]$ Построим функтор $\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}$.

Пусть $\gamma \leftrightharpoons [J[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]\mathbf{I}_1^2]$.

Имеем $\vdash \gamma(x,z) = [J[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]\mathbf{I}_1^2](x,z) = [R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x)$.

Пусть $\tilde{\Psi}_i \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2]$.

Имеем: $\vdash \tilde{\Psi}_i(x,z) \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma]\mathbf{I}_2^2](x,z) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^2\gamma](x,z),\mathbf{I}_2^2(x,z)) =$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x,\gamma(x,z)),z) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x)),z)$.

Итак, $\vdash \tilde{\Psi}_i(x,z) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x)),z)$.

Пусть $\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]} \leftrightharpoons [R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k]$, тогда

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\Lambda) = [R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k](\Lambda) = \Lambda$,

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\mathbf{S}_k(x)) = [R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k](\mathbf{S}_i(x)) = \tilde{\Psi}_i(x,[R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k](x)) = \tilde{\Psi}_i(x,\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(x)) =$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x)),\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(x))$.

Итак, имеем следующие определяющие равенства для фунтора $\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}$:

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\Lambda) = \Lambda$

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\mathbf{S}_i(x)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(x,[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k](x)),\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(x))$, где $i \leq k$.

$\vdash \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\mathbf{S}_i(x)) = \Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(x)$, где $i > k$.

Выпишем определяющие соотношения для функтора $(\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\ldots,\Psi_k]})^* \leftrightharpoons ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^*$:

$([R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^* = ([R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*]$,

$\vdash ([R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k])^*(x,y) = [R\mathbf{Const}_\Lambda^1(\tilde{\Psi}_1)^*,\ldots,(\tilde{\Psi}_k)^*](x,y)$,

$\vdash R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde\Psi_1)^*,\dots,(\tilde\Psi_k)^*](x,\Lambda) = \mathbf{Const}^1_\Lambda(x) = \Lambda$

$\vdash [R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde\Psi_1)^*,\dots,(\tilde\Psi_k)^*](x,\mathbf{S}_i(y)) = (\tilde\Psi_i)^*(x,y,[R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde\Psi_1)^*,\dots,(\tilde\Psi_k)^*](x,y))$, тогда

$\vdash [R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde\Psi_1)^*,\dots,(\tilde\Psi_k)^*](x,\mathbf{S}_i(y)) = (\tilde\Psi_i)^*(x,y,([R\Lambda\tilde\Psi_1,\dots,\tilde\Psi_k])^*(x,y))$,

$\vdash ([R\Lambda\tilde\Psi_1,\dots,\tilde\Psi_k])^*(x,\mathbf{S}_i(y)) = (\tilde\Psi_i)^*(x,y,([R\Lambda\tilde\Psi_1,\dots,\tilde\Psi_k])^*(x,y))$,

$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,\mathbf{S}_i(y)) = (\tilde\Psi_i)^*(x,y,(\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,y))$,

Далее $(\gamma)^* \leftrightharpoons ([J[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]\mathbf{I}^2_1])^*$,

$([J[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]\mathbf{I}^2_1])^* = [J([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*\mathbf{I}^3_1(\mathbf{I}^2_1)^*]$

$(\mathbf{I}^2_1)^* = [J\mathbf{I}^2_1\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3]$

$\vdash (\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z) = [J\mathbf{I}^2_1\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3](x,y,z) = \mathbf{I}^2_1(\mathbf{I}^3_2(x,y,z),\mathbf{I}^3_3(x,y,z)) = y$

$\vdash ([J[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]\mathbf{I}^2_1])^*(x,y,z) = [J([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*\mathbf{I}^3_1(\mathbf{I}^2_1)^*](x,y,z)$

$\vdash [J([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*\mathbf{I}^3_1(\mathbf{I}^2_1)^*](x,y,z) = ([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),(\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z))$

$\vdash ([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),(\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z)) = ([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)$

$\vdash (\gamma)^*(x,y,z) = ([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)$.

$(\tilde\Psi_i)^* \leftrightharpoons ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma]\mathbf{I}^2_2])^*$,

$([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma]\mathbf{I}^2_2])^* = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}^3_1([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(\mathbf{I}^2_2)^*]$,

$(\mathbf{Concat})^* = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_2]$,

$([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^* = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}^3_1(\mathbf{I}^2_1)^*(\gamma)^*]$,

$(\mathbf{I}^2_1)^* = [J\mathbf{I}^2_1\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3]$

$(\mathbf{I}^2_2)^* = [J\mathbf{I}^2_2\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3]$

Имеем:

$\vdash (\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z) = [J\mathbf{I}^2_1\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3](x,y,z) = y$,

$\vdash (\mathbf{I}^2_2)^*(x,y,z) = [J\mathbf{I}^2_2\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_3](x,y,z) = z$

$\vdash (\mathbf{Concat})^*(x,y,z) = [J\mathbf{Concat}\mathbf{I}^3_2\mathbf{I}^3_2](x,y,z) = \mathbf{Concat}(y,z)$,

$\vdash (\tilde\Psi_i)^*(x,y,z) = ([J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma]\mathbf{I}^2_2])^*(x,y,z) = [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}^3_1([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(\mathbf{I}^2_2)^*](x,y,z) =$,

$\vdash ([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(x,y,z) = [J(\Theta_{\Psi_i})^*\mathbf{I}^3_1(\mathbf{I}^2_1)^*(\gamma)^*](x,y,z) = (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),(\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z),(\gamma)^*(x,y,z))$,

$\vdash (\Theta_{\Psi_i})^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),(\mathbf{I}^2_1)^*(x,y,z),(\gamma)^*(x,y,z)) = (\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,(\gamma)^*(x,y,z))$

$\vdash [J(\mathbf{Concat})^*\mathbf{I}^3_1([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(\mathbf{I}^2_2)^*](x,y,z) = (\mathbf{Concat})^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(x,y,z),(\mathbf{I}^2_2)^*(x,y,z))$

$\vdash (\mathbf{Concat})^*(\mathbf{I}^3_1(x,y,z),([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(x,y,z),(\mathbf{I}^2_2)^*(x,y,z)) = \mathbf{Concat}(([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(x,y,z),z)$

$\vdash \mathbf{Concat}(([J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}^2_1\gamma])^*(x,y,z),z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,(\gamma)^*(x,y,z)),z)$

$\vdash \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,(\gamma)^*(x,y,z)),z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)),z)$.

Таким образом получим

$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(x,y,z) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)),z)$, тогда

$\vdash (\tilde{\Psi}_i)^*(x,y,[R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde{\Psi}_1)^*,\dots,(\tilde{\Psi}_k)^*](x,y)) =$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)),[R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde{\Psi}_1)^*,\dots,(\tilde{\Psi}_k)^*](x,y))$, тогда

$\vdash [R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde{\Psi}_1)^*,\dots,(\tilde{\Psi}_k)^*](x,\mathbf{S}_i(y)) =$

$\mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)),[R\mathbf{Const}^1_\Lambda(\tilde{\Psi}_1)^*,\dots,(\tilde{\Psi}_k)^*](x,y))$.

Таким образом получим

$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,\Lambda) = \Lambda$

$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,\mathbf{S}_i(y)) = \mathbf{Concat}((\Theta_{\Psi_i})^*(x,y,([R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k])^*(x,y)),(\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,y))$,

при $i \le k$.

$\vdash (\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,\mathbf{S}_i(y)) = (\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]})^*(x,y)$, при $i > k$.

Для любого функтора Φ для любого интепретационного множества $\mathbb{A}$ докажем

$\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall\overline{\alpha}\Theta_\Phi(\overline{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{\alpha})$.

Выпишем значение оператора Θ:

для исходных функторов:

$\mathbf{S}_k, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{Length}, \dot{-}, \mathbf{Concat}, \mathbf{D}, \mathbf{I}^n_k$, $\mathbf{U}$:

$\Theta_{\mathbf{S}_k} = \mathbf{Z}$, $\Theta_\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, $\Theta_{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{Z}$, $\Theta_\mathbf{Length} = [J\mathbf{ZI}^2_2]$, $\Theta_{\dot{-}} = [J\mathbf{ZI}^2_2]$, $\Theta_\mathbf{Concat} = [J\mathbf{ZI}^2_2]$, $\Theta_\mathbf{D} = [J\mathbf{ZI}^2_2]$, $\Theta_{\mathbf{I}^n_k} = [J\mathbf{ZI}^n_k]$,

$\Theta_\mathbf{U} = [J\mathbf{cI}^1_1\mathbf{U}]$.

для функтора $[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]$

$\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]} \rightleftharpoons [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1\dots\Psi_k],\Theta_{\Psi_1}\dots\Theta_{\Psi_k}]$.

для функтора $[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]$

$\Theta_{[R\alpha\Psi_1,\dots,\Psi_k]} \leftrightharpoons [R\Lambda\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k]$,

для функтора $\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}$

$\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]} \leftrightharpoons [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k]$.

Для любого функтора Ψ алфавита $\mathscr{L}$ верно $\forall\overline{\alpha} \vdash \Theta_\Psi(\overline{\alpha}) = \Lambda$. При использовании правила Гудстейна верно $\vdash \Theta_\Psi(\overline{x}) = \Lambda$.

Докажем $\vdash \Theta_\mathbf{U}(x) = \Theta_{\Theta_\mathbf{U}}(x)$:

$\Theta_\mathbf{U} = [J\mathbf{cI}^1_1\mathbf{U}]$, $\Theta_{\Theta_\mathbf{U}} = \Theta_{[J\mathbf{cI}^1_1\mathbf{U}]} = [J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_\mathbf{c}\mathbf{I}^1_1\mathbf{U}]\Theta_{\mathbf{I}^1_1}\Theta_\mathbf{U}]$, учитывая $[J\Theta_\mathbf{c}\mathbf{I}^1_1\mathbf{U}] = [J\mathbf{ZI}^1_1]$, $\Theta_{\mathbf{I}^1_1} = [J\mathbf{ZI}^1_1]$, получим $\Theta_{\Theta_\mathbf{U}} = \Theta_\mathbf{U}$, тогда $\vdash \Theta_\mathbf{U}(x) = \Theta_{\Theta_\mathbf{U}}(x)$.

Индукционное предположение:

a. Пусть для функтора Φ верно $\mathbf{WordM}_\mathbb{A} \models \forall\overline{x}[\Theta_\Phi(\overline{x}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{x})]$.

b. Пусть для функторов $\Psi_1 \ldots, \Psi_k$ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall y_1, \ldots, \forall y_n [\Theta_{\Psi_i}(y_1, \ldots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(y_1, \ldots, y_n)]$

Докажем $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall y_1, \ldots \forall y_n \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}(y_1, \ldots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}}(y_1, \ldots, y_n)$.

Имеем $\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \ldots, \Theta_{\Psi_k}]$, тогда

$\vdash \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \ldots, \Theta_{\Psi_k}](\overline{y}) =$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))(\mathbf{A})$.

Вычислим $\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}$:

$\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Theta_\Phi}\Psi_1 \ldots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1} \ldots \Theta_{\Psi_k}]$, тогда

$\vdash \Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_{\Theta_\Phi}\Psi_1 \ldots \Psi_k]\Theta_{\Psi_1} \ldots \Theta_{\Psi_k}](\overline{y}) =$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{\Theta_\Phi}(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))$.

Учитывая индукционное предположение $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{x}[\Theta_\Phi(\overline{x}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{x})]$, получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))]$.

Учитывая индукционное предположение $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall y_1, \ldots, \forall y_n [\Theta_{\Psi_i}(y_1, \ldots, y_n) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(y_1, \ldots, y_n)]$,

получим $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\mathbf{Concat}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\overline{y})) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))]$,

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\mathbf{Concat}^3(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\overline{y})) \approx \mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))], \ldots,$

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\overline{y}), \ldots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\overline{y})) \approx$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_\Phi(\Psi_1(\overline{y}), \ldots, \Psi_k(\overline{y})), \Theta_{\Psi_1}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Psi_k}(\overline{y}))]$, учитывая ($\mathbf{A}$), получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1\ldots\Psi_k]}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_2}}(\overline{y}), \ldots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\overline{y})) \approx \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}(\overline{y})(\mathbf{B})$

Вычислим $\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}}$:

$\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}} = \Theta_{[J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]\Theta_{\Psi_1},\ldots,\Theta_{\Psi_k}]}$

$\Theta_{[J\mathbf{Concat}^{k+1}[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]\Theta_{\Psi_1},\ldots,\Theta_{\Psi_k}]} =$

$[J\mathbf{Concat}^{k+2}[J\Theta_{\mathbf{Concat^{k+1}}}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \ldots, \Theta_{\Psi_k}]\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \ldots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}]$, учитывая

$\Theta_{\mathbf{Concat^{k+1}}}[J\Theta_\Phi\Psi_1, \ldots, \Psi_k]\Theta_{\Psi_1}, \ldots, \Theta_{\Psi_k}] = [J\mathbf{ZI}_1^n]$, получим

$\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}} = [J\mathbf{Concat}^{k+1}\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \ldots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}]$, тогда

$\vdash \Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}}(\overline{y}) = [J\mathbf{Concat}^{k+1}\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}\Theta_{\Theta_{\Psi_1}} \ldots, \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}](\overline{y}) =$

$\mathbf{Concat}^{k+1}(\Theta_{[J\Theta_\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}(\overline{y}), \Theta_{\Theta_{\Psi_1}}(\overline{y}), \ldots \Theta_{\Theta_{\Psi_k}}(\overline{y}))$, учитывая ($\mathbf{B}$)получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall \overline{y}[\Theta_{\Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}}(\overline{y}) \approx \Theta_{[J\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi k]}(\overline{y})$

Вычислим $\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\ldots,\Psi_k]}} \leftrightharpoons \Theta_{[R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\ldots,\tilde{\Psi}_k]}$.

Имеем $\tilde{\Psi}_i \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2}, \ldots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]$.

Вычислим $\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\ldots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}$:

$\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\ldots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]} = [J\mathbf{Concat}^{n+3}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2}, \ldots, \mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_{\mathbf{I}_1^{n+2}}, \ldots, \Theta_{\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}}\Theta_\lambda]$, учитывая $\Theta_{\mathbf{I}_i^{n+2}} = [J\mathbf{ZI}_1^{n+1}]$

получим $\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda]$.

Вычислим $\Theta_{\tilde{\Psi}_i}$.

$\Theta_{\tilde{\Psi}_i} \leftrightharpoons \Theta_{[J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]} =$

$[J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_{\mathbf{Concat}}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}\Theta_{\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}}]$, учитывая

$[J\Theta_{\mathbf{Concat}}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}] = [J\mathbf{ZI}_1^{n+2}]$ и $\Theta_{\mathbf{I}_{\tau+2}^{n+2}} = [J\mathbf{ZI}_1^{n+2}]$ получим

$[J\mathbf{Concat}^3[J\Theta_{\mathbf{Concat}}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]\Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}\Theta_{\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}}] = \Theta_{[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]}$, тогда

$\Theta_{\tilde{\Psi}_i} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda]$.

Имеем:

$\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]} = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\Psi_k]$

$\Theta_{[R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k]} = [R\Theta_{\Theta_\Phi}\tilde{\tilde{\Psi}}_1,\dots,\tilde{\tilde{\Psi}}_k]$.

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = [R\Theta_\Phi\tilde{\Psi}_1,\dots,\tilde{\Psi}_k](\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \tilde{\Psi}_1(\overline{x},z,\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z))$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Psi_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\overline{x},\mathbf{S}_i(z))$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z))$

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\Lambda) = [R\Theta_{\Theta_\Phi}\tilde{\tilde{\Psi}}_1,\dots,\tilde{\tilde{\Psi}}_k](\overline{x},\Lambda) = \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{x})$

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \tilde{\tilde{\Psi}}_i(\overline{x},z,\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z))$

Имеем $\tilde{\tilde{\Psi}}_i \leftrightharpoons [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}]$, тогда

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}](\overline{x},z,\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z))$, тогда

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\tilde{\Psi}_i}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\overline{x},z,\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z)),\mathbf{I}_{n+2}^{n+2}(\overline{x},z,\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z)))$

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z))$.

Имеем $\Theta_{\tilde{\Psi}_i} = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda]$, тогда

$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}((\overline{x},z,u) = [J\mathbf{Concat}[J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda]\Theta_\lambda](\overline{x},z,u)$

$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\overline{x},z,u) = \mathbf{Concat}([J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}\lambda](\overline{x},z,u),\Theta_\lambda(\overline{x},z,u))$

$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\overline{x},z,u) = \mathbf{Concat}(J\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_\lambda,(\overline{x},z,u))$

Имеем $\Theta_\lambda = \Theta_{[J[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]]\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]} = [J\mathbf{Concat}^{n+2}[J\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]\Theta_{\mathbf{I}_1^{n+2}},\dots,\Theta_{\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}}]$, тогда $\Theta_\lambda = [J\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}]$, тогда

$\vdash \Theta_\lambda(\overline{x},z,u) = [J\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}\mathbf{I}_1^{n+2},\dots,\mathbf{I}_{n+1}^{n+2}](\overline{x},z,u)$, тогда

$\vdash \Theta_\lambda(\overline{x},z,u) = \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z)$, тогда

$\vdash \Theta_{\tilde{\Psi}_i}(\overline{x},z,u) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]},(\overline{x},z))$, тогда

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z)),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z))$.

Подведём итоги:

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\Lambda) = \Theta_\Phi(\overline{x})$

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\Lambda) = \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{x})$

$\vdash \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z))$

$\vdash \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},\mathbf{S}_i(z)) = \mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{x},z,\lambda(\overline{x},z)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z)),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z))$.

Предположим, что верно:

$\forall\overline{\alpha}\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_\Phi(\overline{\alpha}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{\alpha})$

$\forall\overline{\alpha}\forall\beta\forall\gamma\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha},\beta,\gamma) \approx \Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{\alpha},\beta,\gamma)$

$\forall\overline{\alpha}\forall\beta\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta)$, тогда получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\mathbf{S}_i(\beta)) =$

$\mathbf{Concat}(\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{\alpha},\beta,\lambda(\overline{\alpha},\beta)),\Theta_{[R\Phi\Psi i,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta)),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta)) =$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{\alpha},\beta,\lambda(\overline{\alpha},\beta)),\mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi i,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta)))$, используя индукционное предположение $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{[R\Phi\Psi i,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta))$, получим

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi i,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta)) \approx \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta)$, тогда

$\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \mathbf{Concat}(\Theta_{\Theta_{\Psi_i}}(\overline{\alpha},\beta,\lambda(\overline{\alpha},\beta)),\mathbf{Concat}(\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta),\Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\beta))) \approx$

$\mathbf{Concat}(\Theta_{\Psi_i}(\overline{\alpha},\beta,\lambda(\overline{\alpha},\beta)),\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\beta))$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{\alpha},\mathbf{S}_i(\beta)) \approx \Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{\alpha},\mathbf{S}_i(\beta))$, тогда $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{x}\forall z[\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}(\overline{x},z) \approx \Theta_{\Theta_{[R\Phi\Psi_1,\dots,\Psi_k]}}(\overline{x},z)]$.

Используя индукцию по построению функторов и индукцию по построению аргументного слова, получим: для любого функтора Φ верно $\mathbf{WordM}_{\mathbb{A}} \models \forall\overline{x}[\Theta_\Phi(\overline{x}) \approx \Theta_{\Theta_\Phi}(\overline{x})$.